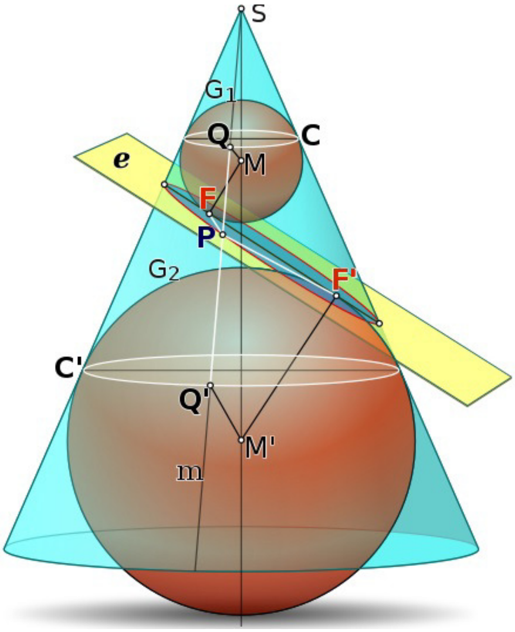
Geometrie der Kegelschnitte (von Gerhard Schallenkamp, 3.3.2017)

Im 3. Jh. v. Chr. untersuchte Apollonios von Perge in seinem Werk *ΚΩΝΙΚΩΝ* ebene Schnitte durch einen Kegel, Eigenschaften von Ellipse, Parabel und Hyperbel. Der französisch-belgische Mathematiker Germinal Pierre **Dandelin** (1794-1847) ergänzte die Schnitte mit **Kugeln**, die den Kegelmantel und die Ebene berühren. Die damit verbundenen Symmetrien zeigen interessante Eigenschaften der Kegelschnitte.



Links im Bild (aus Wikipedia) der Kegelschnitt einer Ellipse, die zwei Kugeln in den Brennpunkten F und F' berührt. Die Kugeln berühren den Kegelmantel kreisförmig und diese Kreise liegen in Horizontalebenen, senkrecht zur Kegelachse.

Ein Kegel ist definiert durch die Spitze S und den Winkel der Mantellinie zur Achse. Wir benötigen hier die **Winkel zur Horizontalebene**, und zwar den Winkel α der Mantellinie und den Winkel β der Kegelschnittebene. Ist die Neigung des Kegelschnitts $\beta < \alpha$ relativ klein wie im Bild, entsteht eine geschlossene Schnittkurve, die Ellipse, im Fall $\beta = 0$ ein Kreis. Mit $\beta = \alpha$ entsteht eine Parabel, die nur eine Dandelin'sche Kugel hat. Im Fall $\beta > \alpha$ entsteht eine Hyperbel, deren Bild erst durch den Doppelkegel vollständig wird; geht der Schnitt durch die Kegelspitze, besteht die Hyperbel nur aus zwei geraden Mantellinien, die sich in S schneiden.

Detaillierte Schnittzeichnungen sind nötig, um daraus Elemente zu separieren und zu untersuchen. Der Focus auf symmetrische Elemente und regelhafte Details macht klug.

Die erforderlichen **Bezeichnungen** orientieren sich am nächsten Bild. Ein Kegelschnitt c liegt in der Ebene E, die die Dandelin'schen Kugeln K_1 und K_2 in den Brennpunkten F_1 bzw. F_2 berührt. Die Schnittlinien von E mit E_1 und E_2 heißen Leitgeraden l_1 und l_2. Die Parabel hat nur eine Berührkugel K_1. Weitere Bezeichnungen:

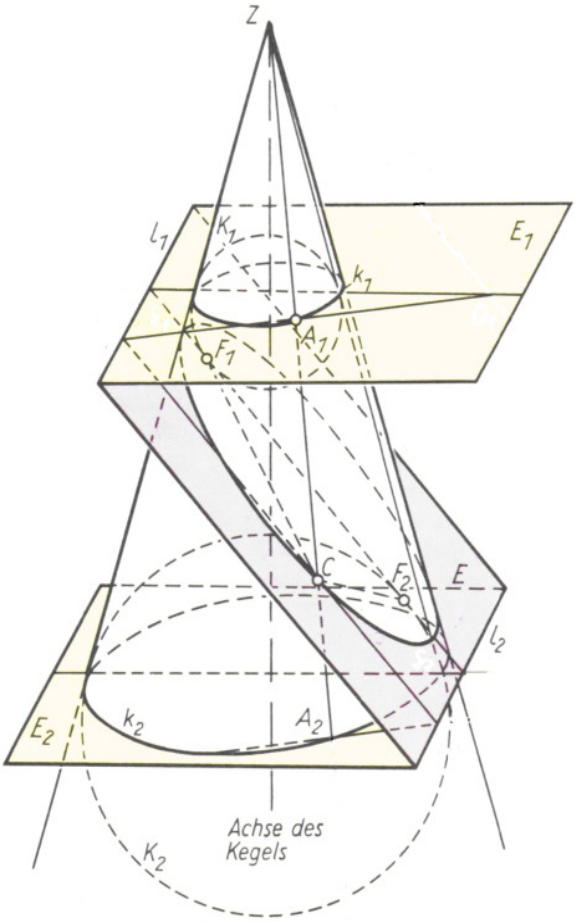
C Punkt auf dem Kegelmantel M
i Index 1 oder 2, bezogen auf die Kugel K_1 oder K_2,
|s| bezeichnet die Länge der Strecke s,
m_i Mantelstrecke von Punkt C zum Punkt A_i des Berührkreises k_i (tangential zu K_i),
f_i Brennstrahl von $C \in c = M \cap E$ zum Brennpunkt F_i (tangential zur Kugel K_i),
d_i Lot von C auf die Leitgerade l_i, $|d_i|$ = Abstand von C zur Leitgerade l_i,
h_i Lot von $C \in M$ zur Ebene E_i, parallel zur Kegelachse,
α Winkel < 90° zwischen Mantellinie m und E_i, $\sin \alpha = |h_i|/|m_i|$,
β Winkel ≤ 90° zwischen E und E_i, von jedem d_i zu E_i, für $C \in c$ gilt $\sin \beta = |h_i|/|d_i|$,
$\beta < \alpha$ Ellipse, $\beta = \alpha$ Parabel, $\beta > \alpha$ Hyperbel, $\beta = 0$ Kreis.

Symmetrie-Satz 1: Sind ein Kreis oder eine Kugel und ein Punkt P außerhalb gegeben, ist für jede Tangente durch P die Distanz von P zum Berührpunkt gleich.

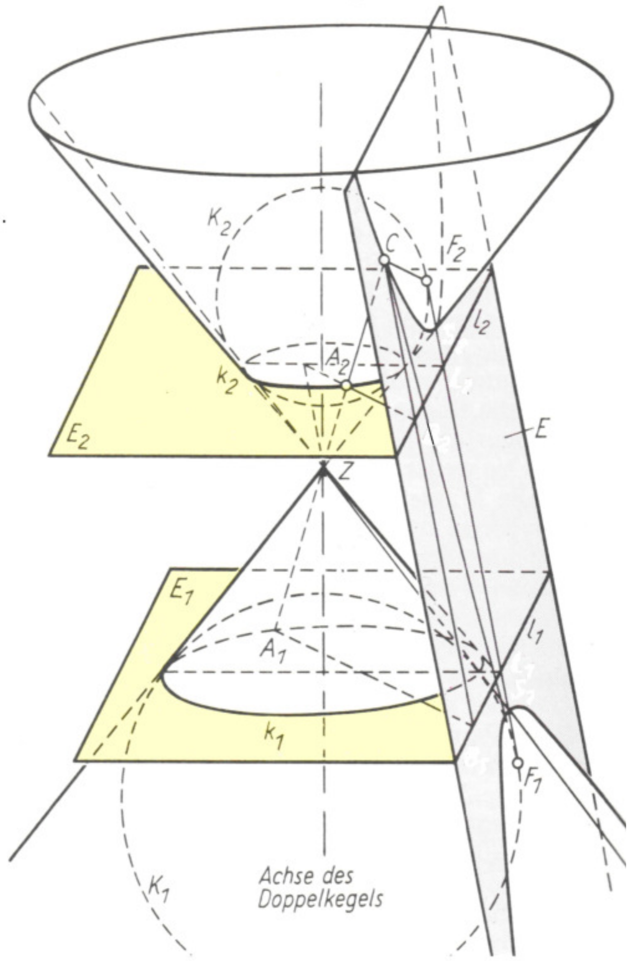
Daraus folgt: Jede Mantelstrecke zwischen den Kreisen k_1 und k_2 ist gleich lang. Wir bezeichnen ihre Länge mit $\mathbf{|m_k|}$. Für die Tangenten durch den Kegelschnittpunkt C an die Kugeln folgt aus Satz 1 auch die gleiche Länge der Tangentenabschnitte m_i und f_i:

Satz 1a. $|m_1| = |f_1|$ und $|m_2| = |f_2|$.

Weil jeder Punkt C der Ellipse zwischen E_1 und E_2 liegt, gilt $|m_1|+|m_2| = |m_k|$. Weil jeder Punkt C der Hypotenuse außerhalb liegt, gilt $||m_1|-|m_2|| = |m_k|$. Daraus folgt



Ellipse als Kegelschnitt



Hyperbel als Kegelschnitt

Satz 2. Für jeden Punkt C der Ellipse gilt $|f_1|+|f_2| = |m_k|$,
für jeden Punkt C der Hypotenuse gilt $||f_1|-|f_2|| = |m_k|$.

In Worten: Die Summe bzw. Differenz der Brennstrecken ist konstant.

Ellipse und Hyperbel sind daher symmetrisch zu ihren Brennpunkten. In den orthogonalen Dreiecke m_ih_i und d_ih_i sind die Proportionen $|h_i|/|m_i| = \sin\alpha =$ konst. und $|h_i|/|d_i| = \sin\beta =$ konst. Abhängig von $\alpha <, =$ oder $> \beta$ folgt wegen $|m_i| = |f_i|$

Satz 3. Für jeden Punkt C des Kegelschnitts c ist $|f_i|/|d_i| = \varepsilon =$ konst. Für die Hyperbel ist $\varepsilon > 1$, für die Ellipse ist $0 < \varepsilon < 1$ und für die Parabel $\varepsilon = 1$, d. h. $|f_1| = |d_1|$.

Wir benötigen noch einen allgemeinen Symmetriesatz.

Satz 4. Die Schnittlinie s zweier Ebenen, die dieselbe Kugel berühren, liegt in der Spiegelungsebene dieser Figur. Beide Tangenten von einem Punkt von s zu den Berührpunkten haben den gleichen Winkel zu s.

Wem das zu abstrakt ist, falte ein Blatt Papier zu einem Modell zweier Ebenen mit Schnittlinie. Jetzt eine Kugel hinein, um zwei Berührpunkte zu markieren. Dann einen Punkt auf der Knicklinie zeichnen und mit den Berührpunkten verbinden. Satz 4 sagt, dass beide Geraden gleichen Winkel zur Knicklinie haben.

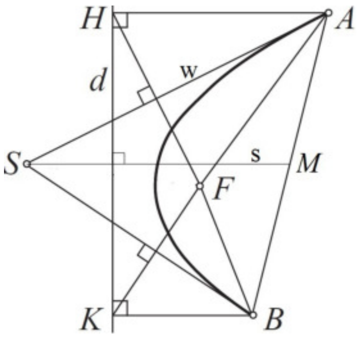
Sei t_C die Tangente am Kegelschnitt c im Punkt C. Sie ist die Schnittlinie von E mit der Tangentialebene am Kegelmantel, die die Mantellinie m_C als Tangente der Dandelin'schen Kugeln enthält. Wegen der anderen Berührpunkte F_1 und F_2 folgt aus Satz 4, dass die Winkel $\angle t_C,f_1 = \angle t_C,m_C = \angle t_C,f_2$, und weiter

Satz 5. Die Tangente eines Kegelschnitts im Punkt C hat dort gleiche Winkel zu den Brennstrahlen. Bei der Parabel ist ein Brennstrahl parallel zur Parabelachse.

Die Kurve der Ellipse reflektiert daher die Brennstrahlen eines Brennpunktes zum anderen, die der Hyperbel so, als kämen die Brennstrahlen vom anderen Brennpunkt. Die Parabel bündelt parallel zur Achse einfallendes Licht zum Brennpunkt, daher der Name.

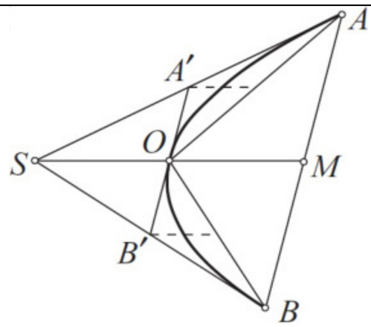
Normale heißt die Gerade, die die Tangente im Berührpunkt orthogonal schneidet. Auch sie hat gleiche Winkel zu den Brennlinien. Ein Brennpunktpaar kann Ellipsen und Hyperbeln haben, für die Satz 5 gilt; nur sind dann Tangente und Normale vertauscht. Damit gilt:

Satz 6. Ellipsen- und Hyperbelkurven mit gleichen Brennpunkten schneiden sich orthogonal.



Die Sätze sind anwendbar auf einen durch zwei Punkte *A* und *B* definierten Parabelabschnitt. Die Parabel selbst ist hier definiert durch die Leitgerade d und den Brennpunkt *F*. Nach Satz 3 sind die Dreiecke *AFH* und *BFK* gleichschenklig. Nach Satz 5 halbieren die Tangenten in den Punkten *A* und *B* die Winkel der Brennstrahlen zu *F* und zur Geraden d und sind Mittelsenkrechten des Dreiecks *FHK*. Dessen dritte Mittelsenkrechte s geht auch durch *S* und ist parallel zur Parabelachse. Es gibt noch ein Argument, warum die Winkelhalbierende w des Dreiecks *AFH* Tangente ist: Für die Abstände der Punkte *P* von w zu *F* und *H* und zur Leitlinie d gilt: $|p_F| = |p_H| \geq |p_d|$ und daher $|p_F|/|p_d| \geq 1$. Gleichheit gilt nur für *P = A;* die anderen Parabelpunkte liegen näher an *F* oder weiter entfernt von d. Damit haben wir den Beweis von Teil 1 von

Satz 7. Die Tangenten in zwei Parabelpunkten *A* und *B* schneiden sich in *S* und s ist die zur Parabelachse parallele Gerade durch *S*.
(1) Dann halbiert s die Strecke *AB*.
(2) Die Tangente in *O*, im Schnittpunkt von s mit der Parabel, ist parallel zu *AB* und halbiert die Strecken *AS* und *BS*.



Beweis von Teil 2. Die Tangente im Schnittpunkt *O* erzeuge die Schnittpunkte *A'* und *B'*. Nach Satz 6 Teil 1 halbieren die Parallelen durch *A'* bzw. *B'* die Strecken *AM* bzw. *BM*. Nach den Strahlensätzen halbieren sie auch die Strecken *AS* und *BS* und die Tangente durch *O* ist parallel zu *AB*.

Das von den Tangenten *AS* und *BS* gebildete Dreieck heißt auch **Archimedisches Dreieck**. Seine Teilflächen F_Δ sind mittels passender Grundseiten vergleichbar. Auf der Grundseite *AS* ist $F_{A'SO} = F_{AA'O}$. Auf der Grundseite *BS* ist $F_{B'SO} = F_{BB'O}$. Aus der Grundseite *SM* ergibt sich dann $F_{ABS} = 2 \cdot F_{ABO} = 4 \cdot F_{A'B'S} = 4 \cdot (F_{AA'O} + F_{BB'O})$. Das in die Parabel einbeschriebene Dreieck F_{ABO} ist halb so groß wie das Archimedische und die beiden im nächsten Schritt einbeschriebenen Dreiecke haben zusammen die Fläche ¼ F_{ABO}, so dass mit q = ¼ die geometrische Reihe $F_{ABO} \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = F_{ABO}/(1 - q)$ die Fläche des Parabelsegments ausfüllt (sog. Exhaustionsmethode).

Satz 8. Der Flächeninhalt des Parabelsegments beträgt $F_{ABO} \cdot 4/3 = F_{ABS} \cdot 2/3$.

Literatur:

Große Kegelschnitt-Skizze aus Kleine Enzyklopädie Mathematik, Leipzig 1971, S. 367 und Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik, Mannheim 1995, S 318,
Claudi Alsina, Roger B. Nelsen, Bezaubernde Beweise, 2013, Abschnitte 9.5 und 9.6 (daraus beide Skizzen mit den Archimedischen Dreiecken),
Georg Glaeser, Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik, 2014,
https://de.wikipedia.org/wiki/Dandelinsche_Kugel,
http://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/lva/gmu/gmu05_06.pdf,
http://www.instmath.rwth-aachen.de/Preprints/bemelmans20110116.pdf.