Werkzeugkasten der Mathematik

Ausdrücke, Strukturen und Abbildungen

Olaf Schimmel

1 Umgang mit Termen

1.1 Terme mit Variablen

Def 1.1

Ein Term ist ein mathematisch sinnvoller Ausdruck mit Zahlen, Variablen und/oder Rechenzeichen.

Bemerkungen:

1. Die einfachsten Terme sind reine Variablen oder Zahlen.
2. Verwendet man in Termen Variable, so muss man den Grundbereich angeben, aus dem sie kommen. Wird nichts angegeben, so geht man davon aus, dass sie mit allen reellen Zahlen belegt werden können.
3. Terme haben je nach den in ihnen verwendeten Rechenzeichen die Struktur von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen usw..

Beispiele: Schreibe als Term...

... das Produkt aus einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger

$$n(n+1) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

...eine durch vier teilbare natürliche Zahl.

$$4 \cdot n \qquad ; \qquad n \in \mathbb{N}$$

... eine dreistellige natürliche Zahl mit den Ziffern a, b und c.

$$100a + 10b + c \quad ; \quad a, b, c \in \{0; 1; 2; ...; 9\} \ \wedge \ a \neq 0$$

... den Quotienten aus dem Dreifachen einer ganzen Zahl und dem Vorgänger des Doppelten der Zahl.

$$\frac{3x}{2x-1} \quad ; \quad x \in \mathbb{Z}$$

Def 1.2

Zwei Terme heißen ***äquivalent****, wenn sie für die jeweils selbe Belegung der Variablen* ***immer*** *dieselben Termwerte ergeben.*

Beispiele: äquivalente Terme: $4x^2 - 25 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-5)(2x+5)$

nicht äquivalent: $\dfrac{2x}{x^2 - 4x} \quad \not\Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{x-4}$

Für x = 0 gilt: linker Term: nicht definiert rechter Term: $-\dfrac{1}{2}$

Beide Terme wären äquivalent wenn man die Zahl x = 0 ausschließt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind sie es nicht.

nicht äquivalent $\sqrt{(x-2)^2} \quad \not\Leftrightarrow \quad (x-2)$

aber: $\sqrt{(x-2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad |x-2|$

Bemerkungen:

1. Viele Terme (Brüche und Wurzeln) sind nur für eingeschränkte Definitionsbereiche äquivalent. Dies ist beim Umformen eines Termes zu beachten.
2. Äquivalente Termumformungen sind
   - Zusammenfassen von Summen, Differenzen, Produkten und Potenzen,
   - Ausmultiplizieren von Produkten,
   - Faktorisieren von Summen und Differenzen.
3. Keine äquivalenten Umformungen sind im Allgemeinen
   - das Kürzen und Erweitern von Brüchen und
   - das Quadrieren und Radizieren

Beispiele: $\dfrac{4x^3 - x}{6x^3 + 3x^2} = \dfrac{x \cdot (2x+1) \cdot (2x-1)}{3x^2 \cdot (2x+1)} = \dfrac{2x-1}{3x}$

Gilt nur für die Einschränkung $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$.

$(\sqrt{2x} - 3) \cdot (\sqrt{2x} + 3) = 2x - 9$ gilt für alle $x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \geqslant 0$

$\sqrt{(x-3)^2} - x = -3$ gilt nur für $x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \geqslant 3$
Um den Term für $x \in \mathbb{R}$ zu vereinfachen wäre eine Fallunterscheidung erforderlich.

Aufgaben:

1. Formen Sie die Terme um, so dass diese sich vereinfachen und geben sie jeweils die Menge an, in denen die Umformung äquivalent ist.

   a) $x^2(x^2 - 5x + 3) - x^4$

   b) $(4 - \sqrt{x})^2$

   c) $(2x)^3 - 8x^2 \cdot (3 + x)$

   d) $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + 1$

   e) $\dfrac{3x^3 + 9x^2}{24x^5 - 6x^3}$

   f) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$

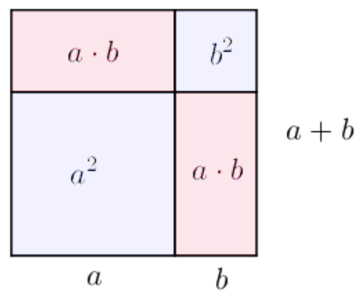
   g) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$

1.2 Binomische Formeln

Die Binomischen Formeln sind ein wesentliches Element zur Vereinfachung von Termen. Sie lauten:

1. Binomische Formel:

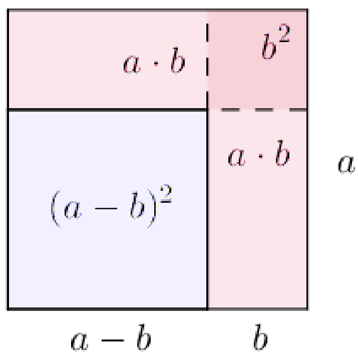
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



2. Binomische Formel:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

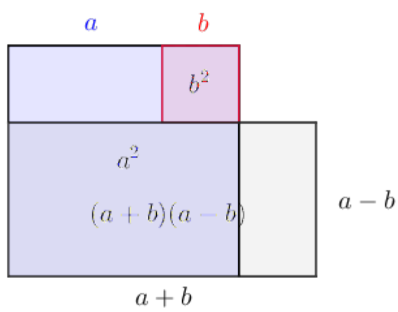
Nimmt man vom großen Quadrat zweimal das Rechteck ab weg, so hat man das kleine Quadrat doppelt entfernt also muss es einmal wieder addiert werden.



3. Binomische Formel:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Entfernt man aus dem großen Quadrat das kleine, so bleibt neben dem kleinen ein Rechteck übrig. Setzt man dies unten an das große Rechteck an, erhält man das gesuchte Rechteck.



Bemerkungen:

1. Besonders das Faktorisieren unter Nutzung der Binomischen Formeln ist sehr wichtig und kann zu weiteren Termvereinfachungen herangezogen werden.

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

   Hier sollte man bei Anwendung der ersten oder zweiten Binomischen Formel immer eine Probe durchführen.

2. Die dritte Binomische Formel findet besonders häufig Anwendung und zwar auch dann, wenn nur ein Quadrat in der Differenz steht.

$$x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x^2 - 3) = (x^2 + 3)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

3. Auch die quadratische Ergänzung kann zum Faktorisieren genutzt werden.

$$x^2 - 6x - 7 = (x - 3)^2 - 16 = (x - 3 - 4)(x - 3 + 4) = (x - 7)(x + 1)$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie:

a) $(2x - 7)^2$	e) $(x + h + 1)^2$	i) $(x + 1)^2$
b) $(-2x - 7)^2$	f) $(x - h + 1)^2$	j) $(x + 1)^3$
c) $(-2x + 7)^2$	g) $(x - h - 1)^2$	k) $(x + 1)^4$
d) $(2x + 7)^2$	h) $(-x - h - 1)^2$	l) $(x + 1)^5$

2. Faktorisieren Sie weitgehend.

a) $x^2 - 4y^2$	d) $x^4 - 36$	g) $x^4 - 18x^2 + 81$
b) $121 - z^2$	e) $x^8 - 256$	h) $x^4 - 6x^2 + 9$
c) $q^6 - 4q^4$	f) $x^{16} - 1$	i) $x^8 - 2x^4 + 1$

3. Faktorisieren Sie, indem Sie zunächst eine geeignete quadratische Ergänzung vornehmen und anschließend die dritte Binomische Formel anwenden.

a) $x^2 - 8x + 7$	e) $x^4 - 6x^2 + 8$
b) $x^2 - 12x + 20$	f) $x^4 - 14x^2 - 51$
c) $x^2 - 4x - 117$	g) $4x^2 + 12x - 7$
d) $x^2 - 18x + 56$	h) $9x^2 - 42xy - 15y^2$

1.3 Bruchterme

Wir bezeichnen einen Term als Bruchterm, wenn seine äußere Struktur die eines Bruches ist. Dabei können im Zähler und Nenner wieder verschiedene Terme (z.B. Polynome, Wurzeln) auftreten.

1.3.1 Kürzen und Erweitern

Beim **Kürzen** wird der Zähler und Nenner des Bruchterms durch denselben Term dividiert, beim **Erweitern** multipliziert. Damit man kürzen kann, muss der Bruchterm im Zähler und Nenner vorher faktorisiert sein. Beim Kürzen vereinfacht sich der Bruchterm, es kann jedoch sein, der maximale Definitionsbereich kann dabei größer werden. Deshalb sollte man weiterhin den Definitionsbereich des Ausgangstermes beachten. Beim Erweitern kann sich der Definitionsbereich verkleinern. Also beachtet man hier am besten den neuen Definitionsbereich des erweiterten Termes.

Beispiele: weitgehendes Kürzen

$$\frac{x^3-9x}{6x^3+18x^2} = \frac{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}{6x^2\cdot(x+3)} = \frac{x-3}{6x}$$

$$\frac{5x^4-5}{x^4+2x^2+1} = \frac{5\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{5(x+1)(x-1)}{x^2+1}$$

Rationalmachen des Nenners durch Erweitern:

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot x} = \frac{(x+\sqrt{3})\sqrt{3}}{3\cdot x} = \frac{\sqrt{3}x+3}{3\cdot x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

CAS-Programme formen immer so um, dass Nenner rational sind. Dabei wird bei Summen und Differenzen im Nenner häufig so erweitert, dass man dort die dritte Binomische Formel anwenden kann.

Erweitern auf den Hauptnenner:

$$\frac{2x-1}{x-1} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1)-(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\frac{5x}{2x-3} + \frac{2x-7}{5x+1} = \frac{25x^2+5x+(2x-7)(2x-3)}{(2x-3)(5x+1)} = \frac{29x^2-15x+21}{(2x-3)(5x+1)}$$

Aufgaben

1. Kürzen Sie weitgehend:

a) $\dfrac{x^2-7x}{3x^2-21x}$ c) $\dfrac{5x^2+30x+45}{4x^2-36}$ e) $\dfrac{2x^4-8x^2}{6x^3-24x^2+24x}$

b) $\dfrac{x^3-4x}{4x^2-8x}$ d) $\dfrac{x^2+8x-7}{3x^3-3x}$ f) $\dfrac{9x^4-36}{4x^3-8x^2}$

2. Machen Sie den Nenner rational.

a) $\dfrac{\sqrt{2}x}{x-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ e) $\dfrac{\sqrt{x}-2y}{\sqrt{x}+y}$

b) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3y}}{\sqrt{2x}+\sqrt{3y}}$ f) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{45x}}{\sqrt{5x}}$

3. Erweitern Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen.

a) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x}$ d) $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{-1-x}{2x+1}$

b) $\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{2}{x-1}$ e) $\dfrac{x^2+1}{x^3}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x+4}{x-5}-\dfrac{x+5}{x-4}$ f) $x+2-\dfrac{x^2-3}{x-2}$

1.3.2 Polynomdivision

Ist in einem Bruchterm das Zählerpolynom von gleichem oder höherem Grad als das Nennerpolynom, so kann man den Bruchterm in einen ganzrationalen Anteil und einen Bruchterm zerlegen, dessen Nenner höhergradig ist. Dies geschieht durch Polynomdivision, die hier an zwei Beispielen gezeigt werden soll:

Beispiel 1: Zerlegen Sie den Bruchterm: $\dfrac{2x^2-4x+3}{x-1}$.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^2 & - & 4x & + & 3) : (x-1) = 2x-2+\frac{1}{x-1} \\
- & (2x^2 & - & 2x) & & \\
\hline
 & & & -2x & + & 3 \\
 & & - & (-2x & + & 2) \\
\hline
 & & & & & 1
\end{array}
$$

Bemerkung:
Das Ergebnis der Polynomdivision (mit dem Restglied) und der Ausgangsterm sind äquivalent. Der zerlegte Bruchterm eignet sich gut zur Abschätzung von Grenzwerten und Angabe von Asymptoten.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 2}$.

Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.

Lösung:
Zunächst formen wir den Funktionsterm um:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & (x^2 & + & 3x & - & 4) & : & (x & + & 2) & = x + 1 - \frac{2}{x+2} \\
- & (x^2 & + & 2x) & & & & & & & \\
\hline
 & & & x & - & 4 & & & & & \\
 & & - & (2x & + & 2) & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & -2 & & & & &
\end{array}
$$

Es gilt somit: $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x-2}$

Wir erkennen vorn die lineare Funktion y = x + 1. Dieser ganzrationale Teil ist gleich der schrägen Asymptote zur Funktion f.
Es ist also $y = a(x) = x + 1$ eine schräge Asymptote.

Am Restglied sehen wir, dass bei $x = -2$ eine Polstelle vorliegt. Also ist die Gerade $x = -2$ eine Polasymptote.

Beispiel 3: Finden Sie den ganzrationalen Anteil von: $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x + 1}$.
Lösung:
Wir dividieren:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & (x^3 & - & 2) & : & (x & + & 1) & = & x^2 - x + 1 - \frac{3}{x+1} \\
- & (x^3 & + & x^2) & & & & & & \\
\hline
 & & & -x^2 - 2 & & & & & & \\
 & & - & (-x^2 - x) & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & x - 2 & & & & & & \\
 & & - & (x + 1) & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -3 & & & & & &
\end{array}
$$

Der ganzrationale Teil heißt: $a(x) = x^2 - x + 1$.
Das Restglied ist $r(x) = -\frac{3}{x+1}$.

Bemerkungen:

1. Den ganzrationalen Anteil a(x) nennt man allgemein auch asymptotische Funktion zu f.

2. Das Restglied r(x) misst die Abweichung zwischen a(x) und f(x) an der Stelle x.

Aufgaben:

1. Zerlegen Sie in Teilbrüche und geben Sie die Asymptoten (asymtotischen Funktionen) an.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 7}{x + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{5x^3 + x^2 + 3x - 7}{x + 2}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ e) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 8x}{x - 1}$

   c) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 3x + 5}{x + 3}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{2x - 1}$

2. Führen Sie die Polynomdivision aus.

   a) $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ c) $\dfrac{x^5 + 1}{x + 1}$ e) $\dfrac{x^4 - a^4}{x - a}$

   b) $\dfrac{x^4 + 1}{x + 1}$ d) $\dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ f) $\dfrac{x^5 - a^5}{x - a}$

1.3.3 Partialbruchzerlegung

Wenn der Nenner einen höheren Grad hat als der Zähler, ist das Verfahren der Polynomdivision nicht zielführend. Manchmal kann es sehr vorteilhaft sein, einen komplexeren Bruch in eine Summe mehrerer Teilbrüche zu zerlegen, weil diese eine einfachere Struktur haben. Ein häufig verwendetes Verfahren hierfür heißt **Koeffizientenvergleich**.

Beispiel 1: Gegeben ist der Bruchterm: $\dfrac{2x - 5}{(x - 2)(x + 1)}$

Wir sehen, dass der Nenner die Nullstellen 2 und - 1 besitzt. Der Term lässt sich also in zwei Teilbrüche mit den Nennern $x - 2$ und $x + 1$ zerlegen. Daraus ergibt sich unser Ansatz:

$$\frac{2x - 5}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Wir multiplizieren mit allen Nennern und erhalten:

$$2x - 5 = A(x + 1) + B(x - 2) = (A + B)x + A - 2B$$

Nun vergleichen wir links und rechts die entsprechenden Koeffizienten und erhalten:

$$A + B = 2 \quad \wedge \quad A - 2B = -5$$

Dies aber ist ein einfaches lineares Gleichungssystem, das wir nun noch lösen müssen.

Wir erhalten:

$$A = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad B = \frac{7}{3}$$

Dies können wir nun oben einsetzen und es ergibt sich:

$$\frac{2x-5}{(x-2)(x+1)} = -\frac{1}{3x-6} + \frac{7}{3x+3}$$

Beispiel 2: Zerlegen Sie den Bruchterm $\frac{6x-4}{(x-1)^2}$

Hier ist die Nullstelle des Nenners eine „doppelte“ Nullstelle. Wir zerlegen deshalb in:

$$\frac{6x-4}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner erhalten wir:

$$6x-4 = A(x-1) + B = Ax + B - A$$

Der Vergleich der Koeffizienten ergibt:

$$A = 6 \quad \wedge \quad B = 2$$

Damit lautet die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{6x-4}{(x-1)^2} = \frac{6}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

Bemerkungen:

1. Nicht immer reicht es, in die Zähler nur Zahlen wie A, B oder C zu setzen. Je nach Struktur der Terme kann es auch erforderlich werden, dass man dort eine lineare Funktion der Form $Ax + B$ oder sogar einen Term höherer Ordnung verwenden muss.
2. Bei Nullstellen höherer Ordnung muss man jede vorkommende Potenz der Nullstelle als möglichen Nenner wählen.

Aufgaben:

1. Zerlegen Sie in Teilbrüche.

a) $f(x) = \frac{3x-7}{x^2+x}$	c) $f(x) = \frac{3x+8}{(x+3)^2}$	e) $f(x) = \frac{x+4}{x^3-x}$
b) $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$	d) $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+2x+1}$	f) $f(x) = \frac{x^2-16}{2x^3-2x^2}$

1.4 Wurzelterme

Terme, die Quadratwurzeln enthalten, bezeichnet man häufig kurz als Wurzelterme. Sehr wichtig bei der Umformung und Vereinfachung solcher Terme ist das Beachten ihres eingeschränkten Definitionsbereiches. Insbesondere wenn mehrere derartige Terme vorkommen, muss die Durchschnittsmenge all ihrer Definitionsbereiche berücksichtigt werden.

Beispiel 1: Fassen Sie zusammen:

$$\sqrt{2x-6}\cdot\sqrt{x+3}$$

$$2x-6 \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad x \geqslant 3 \qquad \wedge \qquad x+3 \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad x \geqslant -3$$

Beides gilt für $x \geqslant 3$.

$$\sqrt{2x^2-18} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2-9}$$

Auch wenn es verlockend ist, hier die Wurzel zu ziehen, so darf man es doch nicht tun.

Beispiel 2: $\dfrac{\sqrt{6x^2-12}}{\sqrt{4x^3-8x}}$

Die Untersuchung der Radikanten ergibt: $0 < x < \sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{6x^2-12}}{\sqrt{4x^3-8x}} = \sqrt{\frac{6(x^2-2)}{4x(x^2-2)}} = \sqrt{\frac{3}{2x}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

Der eingeschränkte Bereich von oben muss aber weiter beachtet werden.

Beispiel 3: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} \qquad x > 2$

$$\frac{\sqrt{x-2}+1-(\sqrt{x-2}-1)}{\sqrt{x-2}^2-1^2} = \frac{2}{|x-2|-1} = \frac{2}{x-3}$$

Aufgabe:

1. Vereinfachen Sie:

   a) $\sqrt{4x^4-36x^3}\cdot\sqrt{x^3+3x}$ b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1$

Bemerkung:
Beachten Sie, dass beim Radizieren der Potenzen von x Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{x} \\
\sqrt{x^2} &= |x| \\
\sqrt{x^3} &= x \cdot \sqrt{x} \\
\sqrt{x^4} &= x^2 \\
\sqrt{x^5} &= x^2 \cdot \sqrt{x} \\
\sqrt{x^6} &= |x^3| = |x|^3 \quad ...
\end{aligned}$$

1.5 Beträge

Sehr häufig stößt man beim Auflösen von Termen und Lösen von Gleichungen oder Ungleichungen auf Terme mit Beträgen. Wir erinnern uns an die Definition des Betrages:

Def 1.3

*Für den **Betrag** einer reellen Zahl x gilt:*

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Bemerkungen:

1. Geometrisch interpretiert man den Betrag einer Zahl x mit ihrem Abstand zum Nullpunkt der Zahlengeraden.
2. Damit ist sofort klar, dass der Betrag einer Zahl niemals negativ ist.
3. Was bei konkreten Zahlen sofort ersichtlich ist, erkennt man an Termen oft nicht so leicht. (siehe auch die zweite Zeile der Definition). Häufig wird das Minus vor einer Variable irrtümlicherweise so gedeutet, als ob man hier einen Term mit negativem Wert vorliegen hätte. Dem ist jedoch nicht so.
   Wenn nämlich x negativ ist, dann ist -x positiv.
4. Löst man Betragsterme auf, so muss man häufig zwei (oder mehr) Fälle unterscheiden. Dabei gilt jeder dieser Fälle nur für bestimmte Bedingungen, die man in den weiteren Rechungen beachten muss.

Beispiel 1: Betragsauflösung: $|2x - 24|$

$$|2x - 24| = \begin{cases} 2x - 24 & x \geqslant 12 \\ -2x + 24 & x < 12 \end{cases}$$

Eigenschaften von Beträgen:

Satz 1.1

Seien x, y beliebige reelle Zahlen. So gilt:

1. $x \leqslant |x| = |-x|$
2. $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Beweis: 1. und 2. folgt direkt aus der Definition.

Zu 3. betrachten wir alle möglichen Fälle:

1. Fall: $x \geqslant 0 \;\wedge\; y \geqslant 0$

$$\begin{aligned} x \cdot y \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = x \cdot y \\ |x| = x \;\wedge |y| = y \quad &\Rightarrow \quad |x| \cdot |y| = x \cdot y \\ &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

2. Fall: $x < 0 \;\wedge\; y \geqslant 0$

$$\begin{aligned} x \cdot y < 0 \quad &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = -x \cdot y \\ |x| = -x \;\wedge |y| = y \quad &\Rightarrow \quad |x| \cdot |y| = -x \cdot y \\ &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

3. Fall: $x \geqslant 0 \;\wedge\; y < 0$

$$\begin{aligned} x \cdot y < 0 \quad &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = -x \cdot y \\ |x| = x \;\wedge |y| = -y \quad &\Rightarrow \quad |x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y \\ &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

4. Fall: $x < 0 \;\wedge\; y < 0$

$$\begin{aligned} x \cdot y > 0 \quad &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = x \cdot y \\ |x| = -x \;\wedge |y| = -y \quad &\Rightarrow \quad |x| \cdot |y| = -x \cdot (-y) = x \cdot y \\ &\Rightarrow \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

In allen vier Fällen ergibt sich die Übereinstimmung.

Satz 1.2

Für reelle Zahlen x, y gilt die ***Dreiecksungleichung:***

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Beweis: Auch hier unterscheiden wir alle möglichen Fälle.

1. Fall: $x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0$

$$\begin{aligned} x+y \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad |x+y| = x+y \\ |x| = x \ \wedge |y| = y \quad &\Rightarrow \quad |x|+|y| = x+y \\ &\Rightarrow \quad |x+y| \leqslant |x| + |y| \end{aligned}$$

2. Fall: $x < 0 \ \wedge \ y \geqslant 0$

$$|x+y| \leqslant \max\{|x|, |y|\} \quad \Rightarrow \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

3. Fall: $x \geqslant 0 \ \wedge \ y < 0$

$$|x+y| \leqslant \max\{|x|, |y|\} \quad \Rightarrow \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

4. Fall: $x < 0 \ \wedge \ y < 0$

$$\begin{aligned} x+y < 0 \quad &\Rightarrow \quad |x+y| = -(x+y) \\ |x| = -x \ \wedge |y| = -y \quad &\Rightarrow \quad |x|+|y| = -x+(-y) = -(x+y) \\ &\Rightarrow \quad |x+y| = |x| + |y| \end{aligned}$$

In allen vier Fällen ergibt sich eine wahre Aussage.

Bemerkungen:

1. Die Dreiecksungleichung ist eine der wichtigsten Ungleichungen überhaupt. Sie wird in der höheren Mathematik oft als Abschätzung verwendet um andere Ungleichungen allgemein zu beweisen.
2. Man kann sie geometrisch (in der euklidischen Ebene) so interpretieren, dass die Summe der Längen zweier Dreieckseiten immer größer ist als die Länge der dritten Seite.

Satz 1.3

Für beliebige reelle Zahlen x,y gilt die ***erweiterte Dreiecksungleichung:***

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

Beweis: Wir betrachten die reellen Zahlen x, y und z mit $x = y + z$ So ist:

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= ||y + z| - |y|| \\ &\leqslant ||y| + |z| - |y|| \\ &= ||z|| \\ &= ||x - y|| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

Aus den Sätzen folgen direkt weitere Ungleichungen, die man für das Rechnen mit Beträgen oder für Beweise heranziehen kann:

Satz 1.4

Seien x und y beliebige reelle Zahlen, dann gilt:

1. $|x| - |y| \leqslant |x - y|$
2. $|y| - |x| \leqslant |x - y|$
3. $|x - y| \leqslant |x| + |y|$

Beispiel 2: Schreiben Sie betragsfrei: $|2x - 11| - 17$

$$|2x - 11| = \begin{cases} 2x - 11 & x \geqslant \frac{11}{2} \\ -2x + 11 & x < \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$|2x - 11| - 17 = \begin{cases} 2x - 28 & x \geqslant \frac{11}{2} \\ -2x + 6 & x < \frac{11}{2} \end{cases}$$

Beispiel 3: Schreiben Sie ohne Beträge: $\dfrac{|x-1|}{|x+1|}$

$$\frac{|x-1|}{|x+1|} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & x \geqslant 1 \ \vee \ x < -1 \\ \\ \dfrac{1-x}{x+1} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Ein Minuszeichen vor einem Bruch kann man entweder in den Zähler oder in den Nenner des Bruches einmultiplizieren.

Aufgaben:

1. Schreiben Sie betragsfrei.

   a) $|2x-5|$ c) $|x+3|-4$ e) $|4-3|2-x||$

   b) $|-2x-7|$ d) $|2x-1|-2x$ f) $2|6-x|+|2x-8|$

2. Lösen Sie die Beträge auf und vereinfachen Sie gegebenenfalls.

   a) $\dfrac{|2x-6|}{x+4}$ c) $\dfrac{|x+2|}{x}-\dfrac{|x-1|}{x}$ e) $\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$

   b) $\dfrac{|2x-6|}{|x+4|}$ d) $\dfrac{|x-5|}{x-5}$ f) $\dfrac{|x^2-1|}{|x^2-4|}$

3. Beweisen Sie die Aussagen aus Satz 1.4.

4. Untersuchen Sie, ob immer gilt: $|x-y| \leqslant |x+y|$.

2 Kurzschreibweisen für komplexe Ausdrücke

In der weiterführenden Mathematik treten häufig Aufgabenstellungen auf, in denen man Summen oder Produkte mit vielen Glieder berechnen soll. Für solche Ausdrücke wurden kürzere Schreibweisen eingeführt. Man arbeitet hier mit Indizes, die dann bei der Berechnung des Ausdrucks einen bestimmten Bereich durchlaufen.

2.1 Summen und Summenzeichen

Summen mit vielen Summanden sind weit verbreitet. Oft sind die diese Summanden Glieder einer Zahlenfolge für die es eine explizite Vorschrift gibt. Für solche Summen kann man eine Schreibweise mit Hilfe des Summenzeichens verwenden.

Beispiele: Summe der ersten n ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n}(2i - 1)$$

Summe der dreistelligen Quadratzahlen

$$100 + 121 + 144 + ... + 691 = 10^2 + 11^2 + ... + 31^2 = \sum_{i=10}^{31} i^2$$

Häufig ist man bestrebt, den Laufindex mit 1 beginnen zu lassen. Im zweiten Beispiel erreicht man das durch eine Indexverschiebung:

$$\sum_{i=10}^{31} i^2 = \sum_{i=1}^{22}(i + 9)^2$$

Man erkennt beispielsweise schnell, dass diese Summe aus 22 Summanden besteht. Die algebraische Struktur des Summanden ist aber durch die Indexverschiebung etwas komplexer geworden.
Man beachte, dass die Verschiebung des Indizes am Summenzeichen und im Summanden gegenläufig ist. Das heißt: Vergrößert man den Index am Summenzeichen, so verkleinert er sich beim Summanden und umgekehrt.

Aufgaben:

1. Schreiben Sie die Summen aus und berechnen Sie

   a) $\sum\limits_{i=1}^{5}(3i-2)$ c) $\sum\limits_{i=1}^{100}(c+2)$ e) $\sum\limits_{i=14}^{23}(i^2-14i+49)$

   b) $\sum\limits_{i=4}^{11}(i^2-3)$ d) $\sum\limits_{i=3}^{10}(i^2-i)$ f) $\sum\limits_{i=1}^{12}(a\cdot i+b)$

2. Schreiben Sie mit dem Summenzeichen.

   a) $1+5+9+...+149$ c) $-2+4-8+16-32\pm ...+4096$

   b) $23+26+29+...+404$ d) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{18}$

3. Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe einer geeigneten Indexverschiebung einfacher.

   a) $\sum\limits_{i=12}^{34}(i-14)$ c) $\sum\limits_{i=-17}^{35}(a\cdot i+23a)$ e) $\sum\limits_{i=14}^{23}(5i-72)$

   b) $\sum\limits_{i=44}^{56}(i^2-10i+25)$ d) $\sum\limits_{i=37}^{100}(i^2-35i)$ f) $\sum\limits_{i=10}^{120}(64-3i)$

Satz 2.1 ***Eigenschaften von Summen:***

Seien $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$ Dann gilt:

1. $$\sum_{i=1}^{n} c = n\cdot c$$

2. $$\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i) = a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. $$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

4. $$\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

5. $$\sum_{i=k}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-k+1} x_{i+k-1}$$

Bemerkungen:

1. Die Beweise dieses Satzes kann man durch den Übergang in die ausführliche Schreibweise und die Anwendung der Eigenschaften der Addition und Multiplikation führen.

2. Jeder der obigen Ausdrücke lässt sich auch in Worten formulieren und auf diese Weise leichter merken.

Beispiel: Summe einer Summe

$s = 1 + (1+2) + (1+2+3) + ... + (1+2+...+n)$

$s = \sum\limits_{i=1}^{n}(1+2+...+i)$

$s = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{i} j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} j$

Der Laufindex j wandert n mal von 1 bis zum jeweiligen i.

Beispiel: Auf einer Walze mit dem Durchmesser 0,1 m werden in einer Papierfabrik n Lagen Papier aufgerollt. Das Papier hat die Dicke d. Ermitteln Sie einen Ausdruck zur Berechnung der Länge des aufgerollten Papiers in Metern.

Umfang der Rolle: $u_1 = \pi \cdot 0,1$
Der Durchmesser wächst mit jeder neuen Lage um 2d.
Also ist der Umfang der k-ten Lage:
$u_k = \pi \cdot (0,1 + 2(k-1)d) = 2\pi \cdot (0,05 + (k-1)d)$
Das wird nun aufsummiert von 1 bis n:

$$l = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n}(2\pi \cdot (0,05 + (i-1)d))$$

2.2 Fakultäten und Produkte

Def 2.1

Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 0$. Dann heißt das Produkt aller positiven natürlichen Zahlen bis einschließlich n ***n-Fakultät*** *geschrieben n!.*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Def 2.2

Wir legen fest: $0! = 1$.

Bemerkungen:

1. Um n verschiedene Elemente in einer Reihe anzuordnen, gibt es genau n! Möglichkeiten. Fakultäten und Produkte tauchen besonders in der Kombinatorik sehr häufig auf.

2. Nur mit der Festlegung $0! = 1$ lassen sich Binomialkoeffizienten bestimmen, die eine 0 enthalten.

3. Die Produktschreibweise mit dem Produktsymbol funktioniert wie die Summenschreibweise. Die Struktur der Faktoren steht hinter dem Symbol. Der Bereich für den Laufindex unter und über dem Symbol.

Beispiele: Berechnen Sie $n! - (n-1)!$.

$n! - (n-1)! = n \cdot (n-1)! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)!$

Schreiben Sie mit Hilfe des Produktsymboles:

1. Das Produkt aller dreistelligen ungeraden Zahlen.

$$101 \cdot 103 \cdot ... \cdot 999 = \prod_{i=50}^{499} (2 \cdot i + 1) = \prod_{i=1}^{450} (2 \cdot i + 99)$$

2. Das Produkt aller vierstelligen Quadratzahlen.
   Es ist $31^2 = 962$, $32^2 = 1024$ und $100^2 = 10000$. Also ist:

$$32^2 \cdot 33^2 \cdot ... \cdot 99^2 = \prod_{i=32}^{99} i^2 = \prod_{i=1}^{68} (i+31)^2$$

2.3 Binomialkoeffizienten und das Pascalsche Dreieck

Def 2.3

Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $k \leqslant n$. Dann heißt:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomialkoeffizient *„n über k“.*

Bemerkung:

Der Biniomialkoeffiezient entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen, die eine Menge mit n Elementen besitzt.

Beispiel: Berechnen Sie für n = 5 und $k \in \{0; 1; ...; 5\}$ die Binomialkoeffizienten.

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 1$$

Satz 2.2 ***Eigenschaften von Binomialkoeffizienten:***

Für Binomialkoeffizienten mit $n; k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ gilt:

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
4. $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

Das **Pascalsche Dreieck** ist als Zahlenschema bekannt. In ihm kann man viele Zusammenhänge zwischen den Zahlen entdecken. Es beginnt oben mit drei Zahlen 1. Darunter erhält man immer die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Man kann es auch mit Binomialkoeffizienten schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

3 Beweismethoden

3.1 Die Beweismethode der vollständigen Induktion

Diese Beweismethode eignet sich zu allen Beweisen, die abzählbar unendliche Mengen, also Mengen betreffen, die mit den natürlichen Zahlen gleichmächtig sind. Es stützt sich darauf, dass jede natürliche Zahl einen Nachfolger besitzt und folgt aus den Axiomen des Peano.

Prinzip der vollständigen Induktion:
Wenn eine Aussage H für eine natürliche Startzahl n_0 wahr ist und aus der Gültigkeit der Aussage H für eine feste aber beliebige natürliche Zahl k allgemein ihre Gültigkeit für den Nachfolger (k+1) gefolgert werden kann, dass gilt die Aussage H für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqslant n_0$.

Symbolisch schreibt man das so:

$$H(n_0) \ \wedge \ H(k) \Rightarrow H(k+1) \qquad \Rightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \wedge n \geqslant n_0 : H(n)$$

Aus diesem Prinzip leitet sich der typische Aufbau eines Induktionsbeweises ab:

1. **Induktionsanfang:**
   Zeige, dass die zu beweisende Aussage für die Startzahl n_0 gilt.
2. **Induktionsschritt:**
   Voraussetzung: Formuliere die Aussage für die feste Zahl k.
   Behauptung: Formuliere die Aussage für den Nachfolger (k+1).
   Beweis: Folgere unter Nutzung der Voraussetzung, dass die Behauptung gilt.

Bemerkungen:

1. Nur, wenn beide Teile aufgeschrieben sind, ist der Beweis korrekt und vollständig.
2. Beachte, dass die Beweiskraft nur für alle Zahlen $n \geqslant n_0$ gilt. Wähle daher die Startzahl möglichst klein.
3. Das Beweisprinzip kann man mit einer langen reihe von hintereinander aufgestellten Dominosteinen vergleichen. Um zu zeigen, dass alle steine umfallen, muss man zeigen, dass der erste umfällt (Induktionsanfang) und allgemein zeigen, dass, wenn der k-te Stein umfällt auch der (k+1)-te Stein umfällt.

Beispiel 1: Zeigen Sie, dass für die n-te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$$

Induktionsanfang:
Sei $n_0 = 1$:

Dann gilt: $f^{(1)} = f'(x) = (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = (-1)^1 \cdot 1! \cdot \frac{1}{x^2}$

Ergebnis: Für $n_0 = 1$ gilt die Formel.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: $\exists k \in \mathbb{N}: \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{x^{k+1}}$

Behauptung: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{1}{x^{k+2}}$

Beweis:
Idee: Wir gehen von der Voraussetzung aus und bilden die (k+1)-te Ableitung, indem wir die k-te Ableitung einmal ableiten und vereinfachen.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= \left((-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{x^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k \cdot k! \cdot \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k \cdot k! \cdot (-1) \cdot (k+1) \cdot \frac{1}{xk+2} \\ &= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{1}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt und die Formel gilt für alle Ableitungen ab der ersten. □

Bemerkung:
Wie vielfältig die Einsatzgebiete dieses Beweisverfahrens sind, sollen die folgenden Beispiele wenigstens zum Teil deutlich machen.

Beispiel 2: Man beweise, dass für die Innenwinkelsumme eines konvexen n-Ecks immer gilt: $S_n = (n-2) \cdot 180°$

Induktionsanfang:
Für das Dreieck gilt: $S_3 = (3-2) \cdot 180° = 180°$. Die Formel stimmt.

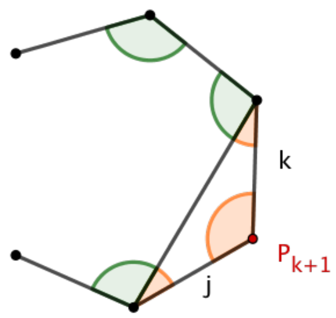
Induktionsschritt:

Voraussetzung: Es gibt ein k-Eck mit $S_k = (k-2) \cdot 180°$.

Behauptung: Für das k+1-Eck gilt: $S_{k+1} = (k-1) \cdot 180°$

Beweis:

Wir betrachten ein k-Eck und gehen davon aus, dass seine Innenwinkelsumme der Formel der Voraussetzung entspricht. Nun wird eine Ecke P_{k+1} hinzugefügt, sodass das neue (k+1)-Eck noch immer konvex ist.



In der Abbildung sehen wir, dass dabei genau die Winkel eines Dreiecks, also 180°. hinzukommen. Damit gilt also:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 180° \\ &= (n-2) \cdot 180° + 1 \cdot 180° \\ &= (n-1) \cdot 180° \end{aligned}$$

Damit gilt die Formel ab n = 3.

□

Beispiel 3: Beweisen Sie, dass die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen n^2 ergibt.

Induktionsanfang: $n_0 = 1$: $1 = 1^2$. Die Formel gilt.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $s_k = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

Behauptung: Dann ist: $s_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$

Beweis:

Wir erhalten die k+1-te Summe, indem wir den k+1-ten Summanden zur Summe s_k addieren.

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + (2k+1) \\ &= k^2 + (2k+1) \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

□

Beispiel 4   Man zeige, dass die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen genau 2^n Elemente besitzt.

Induktionsanfang: $n_0 = 0$
Die Potenzmenge $\wp(M)$ einer Menge M ist die Menge aller ihrer Teilmengen. Hat M 0 Elemente ist $M = \emptyset$ und $\wp(M) = \{\emptyset\}$. Damit hat die Potenzmenge genau ein Element. Wegen $2^0 = 1$ stimmt also die Formel für $n_0 = 0$.

Induktionsschritt:
Voraussetzung: $|M| = k \;\Rightarrow\; |\wp(M)| = 2^k$
Behauptung: $|M| = k+1 \;\Rightarrow\; |\wp(M)| = 2^{k+1}$
Beweis:
Wir gehen von einer k-elementigen Menge M aus und wissen, dass sie genau 2^k Teilmengen besitzt. Zu jeder von diesen fügen wir ein neues Element hinzu und erhalten zu den bisherigen Teilmengen genau 2^k neue Teilmengen. Damit erhalten wir:

$$|\wp(M)| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

□

Beispiel 5   Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $73 \mid (3^{4n+2} + 2^{3n+6})$

Induktionsanfang:
Sei $n_0 = 1$: Dann ist: $3^{4\cdot1+2} + 2^{3\cdot1+6} = 729 + 512 = 1241$
Wegen $73|1241$ gilt die Annahme also für n = 1.

Induktionssschritt:
Voraussetzung: Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $73 \mid 3^{4k+2} + 2^{3k+6}$
Behauptung: Dann gilt auch: $73 \mid 3^{4(k+1)+2} + 2^{3(k+1)+6}$
Beweis:
Idee: Wir gehen von der rechten Seite der Behauptung aus und formen sie so um, dass wir die Voraussetzung verwenden können, um die Teilbarkeit zu zeigen.

$$\begin{aligned} 3^{4(k+1)+2} + 2^{3(k+1)+6} &= 3^{4k+6} + 2^{3k+9} \\ &= 3^4 \cdot 3^{4k+2} + 2^3 \cdot 2^{3k+6} \\ &= 81 \cdot 3^{4k+2} + 8 \cdot 2^{3k+6} \\ &= 73 \cdot 3^{4k+2} + 8 \cdot (3^{4k+2} + 2^{3k+6}) \end{aligned}$$

Dieser Term ist aber durch 73 teilbar, weil beide Summanden durch 73 teilbar sind.

□

Beispiel 6: Zeigen Sie, dass sich jeder ganzzahlige Geldbetrag ab 8 Talern mit Münzen zu 3 Talern und 5 Talern bezahlen lässt.

Induktionsanfang: Sei $n_0 = 8$ Dann ist sicher: $8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$

Induktionsschritt:
Voraussetzung: Es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 8$ und $k = 3 \cdot a + 5 \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$
Behauptung: Dann gibt es $c, d \in \mathbb{N}$ mit $k + 1 = 3 \cdot c + 5 \cdot d$

Beweis:
Idee: Wir versuchen, die Zahl k+1 als Summe von Vielfachen von 3 und von 5 darzustellen. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle.
1. Fall: Sei b = 0.

$$\begin{aligned} k+1 = &\quad 3 \cdot a + 5 \cdot 0 + 1 \\ = &\quad 3 \cdot a - 9 + 9 + 1 \\ = &\quad 3 \cdot (a-3) + 5 \cdot 2 \end{aligned}$$

Für $c = a - 3$ und $d = 2$ ist die Behauptung erfüllt.
Da $k + 1 \geqslant 8 \;\Rightarrow a \geqslant 3$.

2. Fall: $b \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} k+1 = &\quad 3 \cdot a + 5 \cdot b + 1 \\ = &\quad 3 \cdot a + 5 \cdot b - 5 + 5 + 1 \\ = &\quad 3 \cdot a + 6 + 5 \cdot b - 5 \\ = &\quad 3 \cdot (a+2) + 5 \cdot (b-1) \end{aligned}$$

Für $c = a + 2$ und $d = b - 1$ stimmt die Behauptung.
Wegen $b \geqslant 1 \;\Rightarrow d = b - 1 \geqslant 0$
$\square$

Bemerkungen:

1. Im letzten Beispiel haben wir einen häufig vorkommenden mathematischen Trick verwendet. Wir haben dieselbe Zahl addiert und subtrahiert um auf einen Term mit der gewünschten Struktur zu kommen.

2. Im Induktionsschritt führt man häufig einen direkten Beweis, der von der Voraussetzung zur Behauptung führt.

3. Die Beweisideen können sehr unterschiedlich sein.

Beispiel 7: Eine wichtige Ungleichung, die man oft für Abschätzungen verwenden kann, ist die **Ungleichung von Bernoulli**.
Für alle positiven natürlichen Zahlen n und eine reelle Zahl a ($a \geqslant -1$) gilt stets:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + n \cdot a$$

Man beweise die Ungleichung.

Induktionsanfang: Sei $n_0 = 1$: $1 + a \geqslant 1 + a$ ist erfüllt.

Induktionsschritt:
Voraussetzung: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}; k > 0$ mit: $(1+a)^k \geqslant 1 + k \cdot a$
Behauptung: Für $k+1$ gilt dann: $(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1) \cdot a$
Beweis:
Idee: Wir beginnen mit der linken Seite der Behauptung und versuchen durch Umformungen und Abschätzungen die rechte Seite zu erzeugen.

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k \cdot (1+a) \\
&\geqslant (1 + k \cdot a) \cdot (1+a) \\
&= 1 + k \cdot a + a + k \cdot a^2 \\
&\geqslant 1 + k \cdot a + a \\
&= 1 + (k+1) \cdot a
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.
□

3.2 Direkte und indirekte Beweise

Ein mathematischer Satz hat die logische Struktur einer Implikation „Wenn A, dann B“. Dabei ist A die Voraussetzung und B die Behauptung.
Der **direkte Beweis** besteht darin, aus der Voraussetzung durch logische Schlussfolgerungen die Behauptung zu erhalten. Das ist bei manchen Beweisen nicht einfach.
Deshalb nutzt man manchmal einen logisch gleichwertigen Beweis, den **indirekten Beweis**. Er entspricht logisch der Kontraposition der Implikation. Man nimmt an, dass die Behauptung nicht gilt und zeigt durch logische Schlüsse, dass dann auch die Voraussetzung nicht gilt.
Eine häufige Form des indirekten Beweises ist der **Widerspruchsbeweis**. Unter der Annahme, dass die Behauptung nicht gilt, obwohl die Voraussetzungen erfüllt sind, erzeugt man einen Widerspruch.
Wir wollen im folgenden Beispiel denselben Satz auf alle drei Arten beweisen.

Beispiel 1   Beweisen Sie, dass für positive reelle Zahlen a und b stets gilt: Wenn $a^2 < b^2$, dann gilt auch $a < b$.
Voraussetzung: $a^2 < b^2 \ \wedge \ a > 0 \ \wedge \ b > 0$
Behauptung: $a < b$

direkter Beweis:

$$\begin{aligned} a^2 < b^2 \quad &\Rightarrow \quad 0 < b^2 - a^2 \\ &\Rightarrow \quad 0 < (b-a)\cdot(b+a) \\ &\Rightarrow \quad 0 < b - a \\ &\Rightarrow \quad a < b \qquad \square \end{aligned}$$

indirekter Beweis:

Annahme: $a \geqslant b$ Wir multiplizieren einmal mit a einmal mit b.

$$\Rightarrow \quad a^2 \geqslant ab \quad \wedge \quad ab \geqslant b^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 \geqslant b^2 \qquad \square$$

Beweis durch Widerspruch:
Annahme:

$$b \geqslant a \quad \wedge \quad a^2 < b^2$$

Wir multiplizieren die linke Seite der Annahme mit a und erhalten:

$$ab \leqslant a^2 < b^2$$

Nun multiplizieren wir die linke Seite der Annahme mit b:

$$b^2 \leqslant ab$$

Zusammengefasst erhält man:

$$ab \leqslant a^2 < b^2 \leqslant ab \quad \Rightarrow \quad ab < ab$$

Das ist aber ein Widerspruch. $\square$

Bemerkungen:

1. Nur selten ist es so einfach möglich, dieselbe Aussage auf mehrere Arten zu beweisen.
2. Sehr häufig weist man Aussagen über die Eindeutigkeit indirekt nach. Man nimmt an, dass es zwei verschiedene Elemente mit der Eigenschaft gibt und zeigt dann dass die beiden Elemente gleich sind.