Grundlagen der Mengenlehre

1 Grundbegriffe

Def 1 **Mengenbegriff nach Georg Cantor (1845-1918)**
Eine **Menge** ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Def 2 Die Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Beispiel: $2 \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$2 \notin \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Bemerkung: Die Zahlenmengenbezeichnungen sind:

$\mathbb{N}$ = {0; 1; 2; 3; 4; …} = Die Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{Z}$ = Die Menge der ganzen Zahlen. (natürliche und ihre entgegengesetzten)

$\mathbb{Q}_+$ = Die Menge der gebrochenen Zahlen.

$\mathbb{Q}$ = Die Menge der rationalen Zahlen.

$\mathbb{R}$ = Die Menge der reellen Zahlen.

$\mathbb{C}$ = Die Menge der komplexen Zahlen.

Def 3 Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** Ø.

Def 4 Eine Menge, die genau ein Element enthält, heißt **Einermenge**.

Def 5 Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt bei endlichen Mengen auch **Mächtigkeit |M|** der Menge M.

Beispiele: A = {2; 3; 5; 7; 11; 13} = „Die Menge aller Primzahlen die kleiner als 15 sind“
|A| = 5

B = {x: $x \in \mathbb{R} \wedge x < 2$ } = „Die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner als 2 sind“

C = Ø = „Die leere Menge“
|C| = 0

D = {Ø} = „Die Einermenge, die als Element die leere Menge besitzt“
|D| = 1

Bemerkungen zur Darstellung von Mengen:

(1) Mengen kann man in **beschreibender,** in **aufzählender** Form angeben.

(2) Für Teilmengen reeller Zahlen, die alle reellen Zahlen zwischen zwei gegebenen Zahlen liegen, verwendet man häufig auch die **Intervallschreibweise**.

Beispiel: beschreibende Form: Die Menge M aller reellen Zahlen, die größer als (-4) und höchstens gleich 3 sind.

aufzählende Form: $M=\{x : x \in \mathbb{R} \wedge -4 < x \leq 3\}$

als Intervall: M = (-4; 3]

Die Intervallschreibweise kann nur zur Darstellung von Bereichen reeller Zahlen verwendet werden.

2 Teilmengenbeziehungen (Enthaltenseinrelation)

Def 6 Eine Menge B heißt **Teilmenge** einer Menge A genau dann, wenn jedes Element der Menge B auch Element der Menge A ist.
Schreibweise: $B \subseteq A$
Sprechweise: B ist in A enthalten

Beispiel: gegeben: A = {2; 3; 5; 7; 8}, B = {0; 1; 2; 3; …; 9}

Es gilt: $A \subseteq B$ ~ A ist in B enthalten.

und es gilt: $B \not\subseteq A$ ~ B ist nicht in A enthalten.

Def 7 Zwei Mengen A und B heißen **einander gleich** (identisch) genau dann, wenn gilt:
$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$.
Schreibweise: A = B

Def 8 Eine Menge B heißt **echte Teilmenge** einer Menge A genau dann, wenn gilt:
$B \subseteq A \ \wedge \ A \neq B$.
Schreibweise: $B \subset A$

Satz 1 Eigenschaften der Enthaltenseinrelation
(1) Reflexivität: $A \subseteq A$
(2) Transitivität: $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \subseteq C$

Beispiele: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

$(-8;2] \subseteq [-8;2]$

$[-8;2) \not\subseteq (-8;2)$

Transitivität:

A := {1; 2; 3}; B := {0; 1; 2; 3; 4}; C := { 0; 1; 2; …; 9}

$\{1;2;3\} \subseteq \{0;1;2;3;4\}$ und

$\{0,1;2;3;4\} \subseteq \{0;1;2;...;9\}$, also auch

$\{1;2;3\} \subseteq \{0;1;2;...;9\}$

Satz 2 Die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge M.

Begründung:

Eine Menge ist in einer zweiten Menge enthalten, wenn für jedes Element aus der ersten Menge gilt, dass es auch in der zweiten Menge liegt.

Sei also $x \in \emptyset$. (Diese Annahme ist für jedes x falsch)

Aus einer falschen Annahme kann aber alles gefolgert werden (siehe Implikation), also gilt die Folgerung $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$.

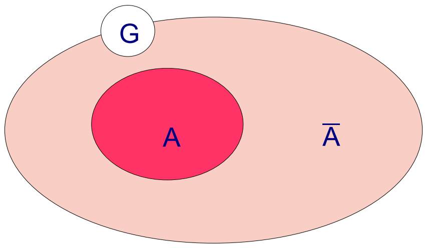
Daraus wiederum ergibt sich: $\emptyset \subseteq M$.

oder anders formuliert:

Es existiert kein x in $\emptyset$, welches nicht auch zu einer beliebigen Menge M gehört.

Def 9 Gegeben sei eine Menge G und eine Teilmenge A, $A \subseteq G$.
Die Menge $\overline{A}$, die genau diejenigen Elemente aus G enthält, die nicht in A liegen, heißt **Komplementärmenge** zu A bezüglich G.

Veranschaulichung:



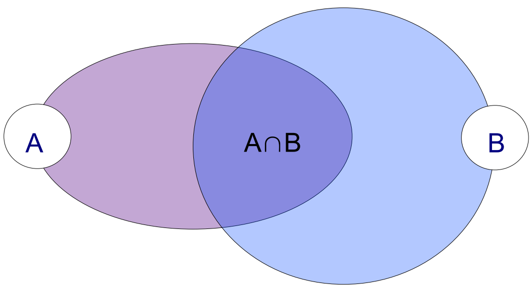
3 Mengenoperationen

3.1 Durchschnitt zweier Mengen

Def 10 Seien A und B zwei beliebige Mengen. Die Menge, die alle die Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B sind, heißt **Durchschnittsmenge** oder Schnittmenge von A und B.

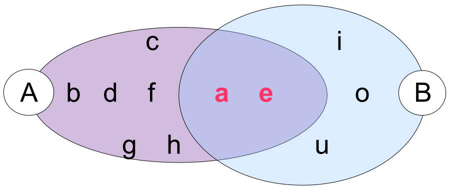
Schreibweise: $A \cap B$

Darstellung:



Beispiel: A := {**a**; b; c; d; **e**; f; g; h}
B := {**a**; **e**; i; o; u}

$A \cap B = \{a; e\}$



Def 11 Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** genau dann, wenn gilt: $A \cap B = \emptyset$

Satz 3 Gesetze zum Schnitt zweier Mengen
Für beliebige Mengen A, B und C gilt:

(1) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(3) $A \cap A = A$

(4) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

(5) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)

(6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assotiativgesetz)

(7) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

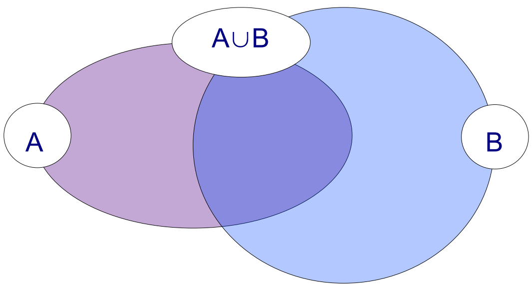
Diese Eigenschaften sind für endliche Mengen recht offensichtlich.

3.2 Vereinigungsmenge

Def 12 Seien A und B zwei beliebige Mengen. Die Menge, die alle die Elemente enthält, die in A oder in B (oder in beiden) sind, heißt **Vereinigungsmenge** von A und B.

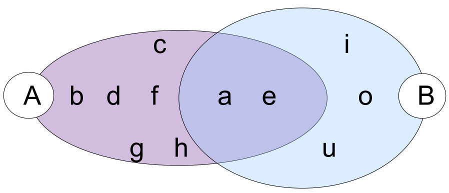
Schreibweise: $A \cup B$

Darstellung:



Beispiel: A := {a; b; c; d; e; f; g; h}
B := {a; e; i; o; u}

$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; o; u\}$



Satz 4 Gesetze zur Vereinigung zweier Mengen

Für beliebige Mengen A, B und C in einer Grundmenge G gilt:

(1) $A \cup \emptyset = A$

(2) $A \cup A = A$

(3) $A \cup \overline{A} = G$

(4) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assotiativgesetz)

(6) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

3.3 Verknüpfungen von Vereinigung und Durchschnitt

Verknüpft man die Mengenoperationen Vereinigung und Durchschnitt miteinander, so kann man (ähnlich wie bei der Verknüpfung von Addition und Multiplikation reeller Zahlen) **Distributivgesetze** finden.

Beispiel: gegeben: A = {a; b; c; d; e}
B = {a; e; i; o; u}
C = {a; b; o; p; u; v}

(1) $(A \cap B) \cup C = \{a; e\} \cup C = \{a; b; e; o; p; u; v\}$

$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{a; b; c; d; e; o; p; u; v\} \cap \{a; b; e; i; o; p; u; v\}$
$= \{a; b; e; o; p; u; v\}$

Beide Ergebnisse stimmen überein.

(2) $(A \cup B) \cap C = \{a; b; c; d; e; i; o; u\} \cap C = \{a; b; o; u\}$

$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{a; b\} \cup \{a; o; u\}$
$= \{a; b; o; u\}$

Beide Ergebnisse stimmen auch hier überein.

Satz 5 Distributivgesetze

Seien A; B und C beliebige Mengen. Dann gilt:

(1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Wir betrachten ein weiteres Beispiel von Mengen innerhalb einer Grundmenge G um zwei weitere wichtige Gesetze der Mengenverknüpfung kennen zu lernen.

Beispiel: gegeben: G = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

A = {1; 3; 4; 5}

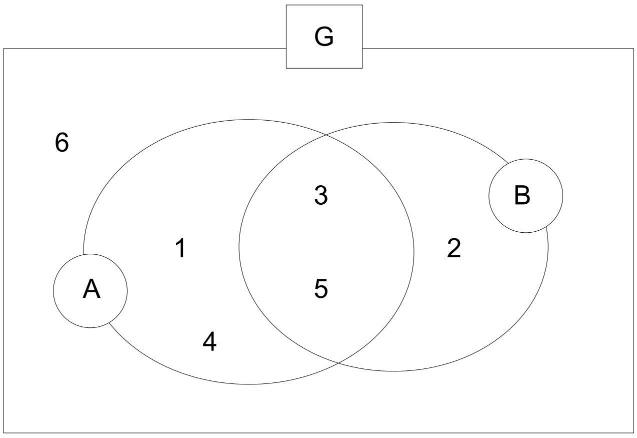
B = {2; 3; 5}

Wir bilden zunächst noch die Komplementärmengen zu A und B:

$$\overline{A}=\{2;6\}$$

$$\overline{B}=\{1;4;6\}$$

Im Diagramm sieht das dann so aus:



Wir bilden:

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2;6\}\cup\{1;4;6\}=\{1;2;4;6\}$$

Das Ergebnis ist aber gerade die Komplementärmenge des Durchschnitts:

$$\overline{A\cap B}=\overline{\{3;5\}}=\{1;2;4;6\}$$

In ähnlicher Weise erhält man auch:

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2;6\}\cap\{1;4;6\}=\{6\}$$ und

$$\overline{A\cup B}=\overline{\{1;2;3;4;5\}}=\{6\}$$

Diese beiden Gesetze nennt man die de Morganschen Regeln:

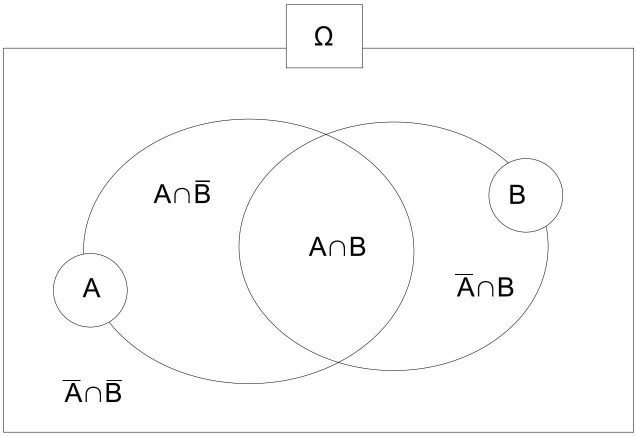
Satz 6 Regeln von de Morgan

Gegeben seien zwei Mengen A und B in einer Grundmenge G. Dann gilt:

(1) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

(2) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

Insbesondere in der Stochastik zerlegt man bei der Betrachtung von Ereignissen eine gegebene Grundmenge (die Ergebnismenge) in zueinander disjunkte Teilmengen. Dazu benutzt man die Durchschnittsbildung. Für zwei Ereignisse A und B bezüglich einer Ergebnismenge Ω sieht diese Zerlegung folgendermaßen aus:



Die vier in der Grafik angegebenen Schnittmengen überschneiden sich paarweise nicht und bilden in ihrer Vereinigung die gesamte Grundmenge Ω.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ordnet man jeder dieser Teilmengen Wahrscheinlichkeiten zu und weiß dann, dass ihre Summe 1 ergeben muss und dass man zur Bestimmung von Ereigniswahrscheinlichkeiten die entsprechenden Teilwahrscheinlichkeiten nur addieren muss.

3.4 Differenzmenge

Eine weitere Verknüpfung in der Mengenlehre ist die Bildung der Differenzmenge. Wie man sich die Subtraktion zweier Mengen vorstellen muss erklärt die folgende Definition:

Def 13 Gegeben seien zwei Mengen A und B. Die **Differenzmenge** von A und B ist die Menge, die alle diejenigen Elemente von A enthält, die nicht in der Menge B liegen.

Schreibweise: $A \setminus B$
Sprechweise: „A ohne B“

Die Differenzmenge kann auch über Durchschnitt und Komplementärmenge ausgedrückt werden.

Es gilt:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Beispiel: gegeben: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 5; 7\}$; $C = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

$A \setminus B = \{0; 1; 4\}$ $A \setminus C = \{1; 3\}$

$B \setminus A = \{5; 7\}$ $B \setminus C = \{3; 5; 7\}$

$C \setminus A = \{6; 8\}$ $C \setminus B = \{0; 4; 6; 8\}$

Wir sehen hier bereits, dass es kein gültiges Kommutativgesetz gibt, denn $A \setminus B \neq B \setminus A$

Wie sieht es mit einem Assoziativgesetz aus? Prüfen wir es im Beispiel:

$(A \setminus B) \setminus C = \{0; 1; 4\} \setminus C = \{1\}$

$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{3; 5; 7\} = \{0; 1; 2; 4\}$

Auch ein Assoziativgesetz gibt es nicht, denn die Ergebnisse sind verschieden.

Hier seien noch einige leicht nachzuweisende Eigenschaften genannt:

Satz 7 Eigenschaften der Differenzmenge $A \setminus B$

(1) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

3.5 Mengenprodukte

Wenn es eine „Subtraktion“ von Mengen gibt, könnte man auch auf die Idee kommen, dass es weitere Operationen von Mengen gibt, die den Rechenoperationen ähnlich sind. Die Vereinigung zweier Mengen kommt am ehesten noch einer Addition nahe, gibt es vielleicht auch eine „Multiplikation“ von Mengen? Und wenn ja, wofür könnte diese sinnvoll zu gebrauchen sein?

Wir gehen wieder von einem Beispiel aus:

Beispiel: Eine Firma stellt Trinkbecher in zwei Größen (I und II) und in drei Farben (blau, gelb und rot) her.

Wenn man beide Produktmerkmale miteinander verknüpft, so sind folgende Verknüpfungen möglich:

(I; b); (I; g); (I; r); (II; b); (II; g); (II; r)

Damit es nicht zu Verwechslungen kommt, ist es hier wichtig, dass die Reihenfolge der Elemente festgelegt ist, also dass immer an erster Stelle eine Größe und an zweiter Stelle eine Farbe steht.

Man spricht in diesem Zusammenhang von **geordneten Paaren**.

Def 14 Seien A und B zwei nichtleere Mengen.

Jedes Zahlenpaar $(x; y)$ mit $x \in A$ und $y \in B$ heißt **geordnetes Paar** von Elementen aus den Mengen A und B.

Def 15 Zwei geordnete Paare $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ heißen genau dann **gleich**, wenn gilt: $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Def 16 Seien A und B zwei nichtleere Mengen.
Die Menge aller geordneten Paare $(x; y)$ mit $x \in A$ und $y \in B$ heißt **Produktmenge** bzw. kartesisches Produkt $A \times B$ der Mengen A und B.

Schreibweise: $A \times B = \{(x; y); x \in A \wedge y \in B\}$ (lies A kreuz B)

Beispiele: Die Menge aller Punkte im kartesischen Koordinatensystem: $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (zweidimensional)

Die Menge aller Gitterpunkte im kartesischen Koordinatensystem: $P = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

In diesen beiden Beispielen sind die Mengen jeweils gleich. Man kann auch mehrmals auf diese Weise multiplizieren und erhält dann geordnete Tripel oder n-Tupel.

Die Menge aller Punkte im räumlichen Koordinatensystem:
$P = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y; z); x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$

Nun folgen zwei sinnvolle Festlegungen, die die Produktbildung mit der leeren Menge betreffen:

Def 17 Sei M eine beliebige Menge. Dann gilt:
(1) $M \times \emptyset = \emptyset$
(2) $\emptyset \times M = \emptyset$

Auch für das Mengenprodukt kann man nun untersuchen, ob solche Gesetze wie Kommutativgesetz oder Assoziativgesetz gelten. Dies soll anhand eines weiteren Beispiels geschehen:

Beispiel: Seien A = {1; 2}, B = {a, b, c} und C = {α; β}

$A \times B = \{(1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c)\}$

$B \times A = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$

Beide Produkte sind zwar gleichmächtig, aber die Elemente sind verschieden.
Damit gilt also kein Kommutativgesetz.

Betrachten wir nun ein Element aus $(A \times B) \times C$: ((1; a); α)

Wenn die Reihenfolge der Zusammenfassung eine andere ist: $A \times (B \times C)$ erhält man: (1; (a; α)), also ein anderes Element.

Stehen keine Klammern, so ist ein Element aus: $A \times B \times C$: (1; a; α)

Ein allgemeines Assoziativgesetz gilt für die Multiplikation von Mengen also nicht.

Verknüpft man jedoch die Multiplikation mit anderen Mengenoperationen, so erhält man folgende Gesetze:

Satz 8 Distributivgesetze mit der Produktmenge:

Seien A, B und C beliebige Mengen. So gilt:

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

(6) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Beweis für (1):

$\rightarrow$

$(x; y) \in \; A \times (B \cap C) \;\Rightarrow\; x \in A \;\wedge\; y \in (B \cap C)$

$\Rightarrow\; x \in A \;\wedge\; y \in B \;\wedge\; y \in C$

$\Rightarrow\; x \in A \;\wedge\; y \in B \;\wedge\; x \in A \;\wedge\; y \in C$

$\Rightarrow\; (x; y) \in A \times B \;\wedge\; (x; y) \in A \times C$

$\Rightarrow\; (x; y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow\; A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ (Die Gleichheit ist noch nicht gezeigt!)

$\leftarrow$

$(x; y) \in \; (A \times B) \cap (A \times C) \;\Rightarrow\; x \in A \wedge y \in B \;\wedge\; x \in A \wedge y \in C$

$\Rightarrow\; x \in A \;\wedge\; y \in B \;\wedge\; y \in C$

$\Rightarrow\; x \in A \;\wedge\; y \in (B \cap C)$

$\Rightarrow\; (x; y) \in \; A \times (B \cap C)$

$\Rightarrow\; (A \times B) \cap (A \times C) \;\subseteq\; A \times (B \cap C)$ (Jetzt ist die Gleichheit gezeigt.)

Jede der Verknüpfungen ist eine Teilmenge der anderen Verknüpfung. Dies geht dann und nur dann, wenn beide Mengenverknüpfungen gleich sind. Also gilt:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

q.e.d.

In analoger Weise lassen sich auch die anderen Gesetze nachweisen.

4 Potenzmenge

In Abschnitt 2 haben wir den Teilmengenbegriff kennen gelernt. Man könnte nun auf die Idee kommen, alle Teilmengen einer Menge aufzuschreiben und diese wiederum in einer Menge zusammenzufassen. Man erhält dann eine Menge die selbst Mengen als Elemente hat. Eine solche Mengen wird auch als **Menge zweiter Stufe** bezeichnet.

Beispiel: A = {0; 1; 2}

Die Teilmengen von A sind: $\emptyset$; {0}; {1}; {2}; {0; 1}; {0; 2}; {1; 2}; {0; 1; 2}.

Damit wäre dann die oben beschriebene Menge:

$\wp(A) = \{ \varnothing ; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; \{0; 1; 2\}\}$.

Sie heißt Potenzmenge von A.

Def 18 Gegeben sei eine Menge A. Die Menge , die alle Teilmengen von M enthält, heißt Potenzmenge der Menge A.

Beispiele:

(1) $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$ $\quad |\wp(\varnothing)| = 1$

(2) $\wp(\{r\}) = \{\varnothing ; \{r\}\}$ $\quad |\wp(\{r\})| = 2$

(3) $\wp(\{r; s\}) = \{\varnothing ; \{r\}; \{s\}; \{r; s\}\}$ $\quad |\wp(\{r; s\})| = 4$

Offensichtlich hat die Potenzmenge einer Menge immer eine Zweierpotenz als Anzahl von Elementen.

Satz 9 Gegeben sei eine Menge A mit n Elementen, also $|A| = n$. Dann hat die Potenzmenge von A genau 2^n Elemente.

$|A| = n \quad \Rightarrow \quad |\wp(A)| = 2^n$

Beweis: (mit vollständiger Induktion)

Induktionsanfang: Sei $n_0 = 0$.

$|\varnothing| = 0 \quad \Rightarrow \quad \wp(\varnothing) = \{\varnothing\} \quad \Rightarrow \quad |\wp(\varnothing)| = 1 = 2^0$

Für $n_0 = 0$ ist die Aussage des Satzes wahr.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: $|A| = k \quad \Rightarrow \quad |\wp(A)| = 2^k \quad (k \in \mathbb{N}; k \geq 0$; fest)

Behauptung: $|A^*| = k+1 \quad \Rightarrow \quad |\wp(A^*)| = 2^{k+1}$

Beweis: Wir stellen uns eine Menge A mit k Elementen vor. Nach Voraussetzung hat ihre Potenzmenge dann genau 2^k Elemente, es gibt also genau 2^k Teilmengen von k.

Nun wird ein k+1-tes Element e zu A hinzugefügt.

Dann gilt:

(1) Teilmengen ohne e:
Jede Teilmenge von A ist auch Teilmenge von A*.
A* hat also zunächst auch die 2^k Teilmengen, die A hat.

(2) Teilmengen mit e:
Sei M eine beliebige Teilmenge von A.
Dann ist: $M^* = M \cup \{e\}$ eine Teilmenge von A*.
M* ist jedoch keine Teilmenge von A gewesen, da e nicht in A liegt.
So kommen also weitere 2^k Teilmengen zu A* dazu, die

nicht zu A gehören.

Damit ergibt sich:

$|\wp(A^*)| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Induktionsschluss: Da die Aussage des Satzes für die Startzahl 0 gilt und aus der Gültigkeit der Aussage für die natürliche Zahl k die Gültigkeit der Aussage für den Nachfolger k+1 gefolgert werden konnte, gilt die Aussage des Satzes für alle natürlichen Zahlen.

q.e.d.