

Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Teiler und Vielfache

Bemerkung: Schüler kennen die Teilerschreibweise $a|b$ und können Teiler- sowie Vielfachenmengen natürlicher Zahlen angeben

Weitere Begriffe wie: echter Teiler, Ergänzungsteiler sollten bekannt sein.

Der Begriff teilerfremd sollte ebenfalls bekannt sein.

Beispiele Gib die Vielfachenmenge an:

:

- | | |
|--|---------------------------|
| a) V_2 | $\{2; 4; 6; 8; \dots\}$ |
| b) Vielfache der Zahl 23 die kleiner als 120 sind. | $\{23; 46; 69; 92; 115\}$ |
| c) Vielfache von 17 zwischen 50 und 100 | $\{51; 68; 85\}$ |

Bestimme die Teilmengen von

- | | |
|--------|---------------------------------|
| a) 42 | $\{1; 2; 3; 6; 7; 14; 28; 42\}$ |
| b) 121 | $\{1; 11; 121\}$ |

Gib alle echten Teiler von 24 an! $\{2; 3; 4; 6; 8; 12\}$

Gib den Ergänzungsteiler zu $8|96$ an! 12

Ein Teiler heißt 6 sein Ergänzungsteiler heißt 9. $6 \cdot 9 = 54$
Wie heißt die dazugehörige natürliche Zahl?

Die Zahl a hat den echten Teiler 12.

- a) Nenne 3 Beispiele für die Zahl a! $24; 36; 120$
- b) Welche Teiler hat a in jedem Falle noch? $\text{alle Teiler von } 12: 1; 2; 3; 4; 6$

Schreibe als Term:

- a) 130 ist durch 26 teilbar. $26 \mid 130$
- b) 45 ist nicht durch 7 teilbar. $7 \nmid 45$

Teilbarkeit von Summen, Differenzen und Produkten

Bemerkung: Schüler kennen die entsprechenden Sätze und können diese auf entsprechende Aufgabenstellungen anwenden.

Hier könnte man (in entsprechend leistungsstarken Klassen) auch auf Reste eingehen.

Beispiele: Gib jeweils eine Zahl für a so an, dass gilt:

:

- a) $6 \mid (37 + a)$ $a = 5$
- b) $8 \mid (47 - a)$ $a = 7$

Bestimme jeweils die kleinste positive Zahl a , für die gilt:

a) $12 \mid (a \cdot 8)$

$a = 3$

b) $24 \mid (22 \cdot 9 \cdot a)$

$a = 4$

Durch welche natürlichen Zahlen ist das Produkt aus 7 und 5 teilbar?

1; 5; 7; 12

Entscheide und begründe welche Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $12 \mid (36 + 170)$

falsch, denn $12 \mid 36$
und $12 \nmid 170$

b) $25 \mid (500 - 51)$

falsch, denn $25 \mid 500$
und $25 \nmid 51$

c) $9 \mid (3 \cdot 15)$

wahr, denn 3 kommt
doppelt vor

d) $9 \mid (21 + 42)$

e) $2 \mid (321 - 79)$

wahr, denn
Restsumme = 9

f) $8 \mid (271 \cdot 16)$

wahr, denn
Restdifferenz = 0

wahr, denn $8 \mid 16$

Durch welche Zahlen ist die Differenz $481 - 475$ teilbar?

1; 2; 3; 6

Welchen Rest muss die Zahl a bei Division durch 15 lassen, damit gilt:

a) $15 \mid (127 - a)$

Rest: 7

b) $15 \mid (127 + a)?$

Rest: 8

Teilbarkeitsregeln

Bemerkung: Schüler kennen die Teilbarkeitsregeln für 2; 3; 4; 5; 6; (8); 9; 10; (11); 25 und können Zahlen auf Teilbarkeit untersuchen.

Schüler können Teilbarkeitsregeln entsprechen kombinieren z.B. Teilbarkeit durch 15; 24; 36.

Beispiele Untersuchung auf Teilbarkeit durch 2; 3; 4; 5; 6; 9:

:

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| a) 45 024 | Q = 15; Teiler: 2; 3; 4; 6 |
| b) 24 777 812 | Q = 38; Teiler: 2 |
| c) 76 082 478 618 015 | Q = 63; Teiler: 3; 5; 9 |

Für welche Ziffern z gilt jeweils:

- | | |
|----------------------|---------------|
| a) $4 \mid 723z$ | 2; 6 |
| b) $4 \mid 23z4$ | 0; 2; 4; 6; 8 |
| c) $3 \mid 67zz$ | 1; 4; 7 |
| d) $9 \mid 4z22$ | 1 |
| e) $6 \mid 7z7z$ | 2; 5; 8 |
| f) $25 \mid 234 6z5$ | 2; 7 |

Wie viele Nullen muss eine Zahl am Ende 3 Nullen, denn $200 \mid$

haben, damit sie durch 200 teilbar ist? 1000

Nenne eine Teilbarkeitsregel für die Zahl 15! Eine Zahl ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.

Wahr oder falsch?

a) Eine Zahl ist durch 24 teilbar, wenn sie durch 6 und 4 teilbar ist. falsch, z.B. $24 \nmid 36$

b) Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und 9 teilbar ist. wahr, denn 4 und 9 teilerfremd

Primzahlen, Primfaktorzerlegung

Bemerkung: Schüler sollten den Begriff Primzahl kennen, Primzahlen bis 100 angeben können: oder bestimmen können

Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Zahlen, Angabe von Teilern mit der Primfaktorzerlegung

Beispiele Bestimme alle Primzahlen zwischen 60 und 70! 61; 67
:

Bestimme die Primfaktorzerlegung der Zahlen!

a) 35 $5 \cdot 7$

b) 72 $2^3 \cdot 3^2$

c) 256 2^8

d) 400

$$2^4 \cdot 5^2$$

Bestimme über die Primfaktorzerlegung alle echten Teiler der Zahl!

a) 289

$$17^2; \quad T: 17$$

b) 230

$$2 \cdot 5 \cdot 23; \quad T: 2; 5; 10; 23; 46; 115$$

c) 81

$$3^4; \quad T: 3; 9; 27$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches, größter gemeinsamer Teiler

Bemerkung: Schüler sollten die Begriffe kennen und kgV bzw. ggT bestimmen können, (auf komplizierte Zerlegungen sollte man in Tü verzichten)

Ergänzungen: eventuell kann hier auch auf Differenzen eingegangen werden

Einfache Sachaufgaben zu ggT und kgV können ebenfalls Gegenstand der Übungen sein.

Beispiele Bestimme den ggT der Zahlen:

:

a) 8 und 12

$$4$$

b) 2400 und 2405

$$5 \quad (\text{Differenz})$$

c) 240 und 360

$$120$$

Bestimme alle gemeinsamen Teiler der Zahlen!

$$\text{ggT} = 6; \quad \text{weitere: } 1;$$

- | | |
|--------------------|--------------------------------------|
| a) 36 und 42 | 2; 3 |
| b) 23997 und 23999 | ggT = 1; |
| c) 400 und 420 | ggT = 20; weitere: 1;
2; 4; 5; 10 |

Bestimme das kgV der Zahlen:

- | | |
|------------------|------|
| a) 200 und 300 | 600 |
| b) 1600 und 2000 | 8000 |
| c) 19 und 20 | 380 |
| d) 24 und 72 | 72 |

Welches ist der kleinste Betrag, den man nur mit 20-ct- oder nur mit 50-ct-stücken bezahlen kann? Wie viele Münzen benötigt man jeweils?

1 €; 5·20ct, 2·50ct

Zwei Züge einer Modelleisenbahn brauchen jeweils 20s oder 24s für eine Runde. Sie fahren gleichzeitig los.

120 s = 2 min

Nach welcher Zeit holt der schnellere Zug den langsameren ein?

6 Runden

Wie viele Runden hat er dann zurückgelegt?