Nim-Spiele

Meisterklasse Mathematik Dresden 2020
Olaf Schimmel

Inhaltsübersicht

1 Was sind Nim-Spiele?

Als **Nim-Spiel** bezeichnet man ein Spiel,
in dem zwei Spieler abwechselnd Spielsteine
von einem oder mehreren Stapeln entfernen.

Gewonnen hat in der Regel der Spieler, der
die letzten Spielsteine entfernen kann.

Es gibt zahlreiche Varianten dieser Spiele.

2 Original Nim-Spiel - Grundlagen

Ausgangssituation:
Auf drei Stapeln liegen a, b und c Hölzchen. (a; b; c)

Zwei Spieler A und B nehmen abwechselnd Hölzchen weg.
A beginnt.

Regeln:
(1) Man darf nur Hölzchen von einem Stapel nehmen.
(2) Man muss mindestens ein Hölzchen nehmen.
(3) Man darf maximal den ganzen Stapel entfernen.
(4) Der Spieler mit dem letzten gültigen Zug ist Sieger.

2 Original Nim-Spiel - Grundlagen

- genauer Ursprung nicht bekannt
- Charles L. Bouton veröffentlicht 1901 Artikel:
  „Nim - A game with a complete mathematical theory"
- Mitbegründung der kombinatorischen Spieltheorie
- eines der ersten Computerspiele
- Wirtschaftsausstellung 1951:
  Wirtschaftsminister verliert gegen Nimrod

2 Original Nim-Spiel - Grundlagen

Spieler	Zug	Konstellation
		(5; 6; 8)
A	(0; 0; -7)	(5; 6; 1)
B	(-3; 0; 0)	(2; 6; 1)
A	(0; -3; 0)	(2; 3; 1)
B	(0; -2; 0)	(2; 1; 1)
A	(-2; 0; 0)	(0; 1; 1)
B	(0; -1; 0)	(0; 0; 1)
A	(0; 0; -1)	(0; 0; 0)

A gewinnt dieses Spiel.

3 Einfache Konstellationen

(0; 0; 1): Gewinnkonstellation G
ebenso: (0; 1; 0); (1; 0; 0)

(0; 1; 1): Verlustkonstellation V
ebenso: (1; 0; 1); (1; 1; 0)

(0; 1; 2): G
Stelle (0; 1; 1) her.
Der Gegner findet V vor.

(0; 2; 2): V
(0; 1; 2), (0; 0; 2), (0; 2; 1), (0; 2; 0)
Der Gegner findet immer G vor

3 Einfache Konstellationen

(1; 2; 3): in einem Zug erzeugbar:
(0; 2; 3); (1; 1; 3); (1; 0; 3); (1; 2; 2); (1; 2; 1)
(1; 2; 0)
Der Gegner findet immer G vor.
Damit liegt V vor.

(2; 3; 4): in einem Zug erzeugbar: (2; 3; 1)
Damit liegt G vor.

Übungsphase 1

3 Einfache Konstellationen

Satz 1:

Die Konstellation (0; k; k) ist für jede positive Zahl k eine Verlustkonstellation.

Beweis:

Spieler I macht einen beliebigen Zug.
Spieler II kopiert den Zug auf dem anderen Stapel.
Spieler II macht den letzten Zug.

3 Einfache Konstellationen

Satz 2:

Die Konstellation (m; k; k) ist für beliebige positive Zahlen k und m eine Gewinnkonstellation.

Beweis:

Spieler I erzeugt (0; k; k).
Spieler II findet eine Verlustkonstellation vor.

4 Nim-Summen

Beispiel 1: (5; 7; 8)

	8	4	2	1
5	0	1	0	1
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
	1	0	1	0

4 Nim-Summen

Die **Nim-Summe** ist die spaltenweise Summe der Dualzahlen der drei Stapel ohne Übertrag.
Dabei gilt:

$$0 + 0 + 0 = 0$$
$$0 + 0 + 1 = 1$$
$$0 + 1 + 1 = 0$$
$$1 + 1 + 1 = 1$$

4 Nim-Summen

Beispiel 2:

	16	8	4	2	1
10	0	1	0	1	0
17	1	0	0	0	1
27	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0

5 Analyse von Konstellationen

Verlustsituation 1: (0; 14; 14)

	16	8	4	2	1
0	0	0	0	0	0
14	0	1	1	1	0
14	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0

Es entsteht eine Nullsumme.

5 Analyse von Konstellationen

Verlustsituation 2: (1; 2; 3)

	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	0

Es entsteht eine Nullsumme.

5 Analyse von Konstellationen

Vermutung:

Es liegt genau dann eine Verlustkonstellation vor, wenn die Nim-Summe eine Nullsumme ist.

Beweis: später

Übungsphase II

6 Ermittlung von Spielzügen

Beispiel:

	16	8	4	2	1
19	1	0	0	1	1
21	1	0	1	0	1
13	0	**1**	1	**0**	**1**
	0	**1**	0	**1**	**1**

16	8	4	2	1	
1	0	0	1	1	19
1	0	1	0	1	21
0	**0**	1	**1**	**0**	6
0	**0**	0	**0**	**0**	

Der letzte Stapel muss um 7 auf 6 reduziert werden.

6 Ermittlung von Spielzügen

Satz 3:

Aus jeder Nim-Summe, die nicht 0 ist, kann man in einem Zug eine Nullsumme herstellen.

Beweis (konstruktiv):
Betrachte in der Nim-Summe die erste Ziffer 1.
Ändere in dieser Spalte in einer der Zahlen die 1 auf 0.
Ändere anschließend in dieser Zahl alle weiteren Ziffern, in denen die Nim-Summe eine 1 hat.
Damit entsteht immer eine Nullsumme.

6 Ermittlung von Spielzügen

Beispiel:

	16	8	4	2	1
27	1	1	0	1	1
25	1	1	0	0	1
7	0	0	**1**	1	**1**
	0	0	**1**	0	**1**

16	8	4	2	1	
1	1	0	1	1	27
1	1	0	0	1	25
0	0	**0**	1	**0**	2
0	0	**0**	0	**0**	

Der letzte Stapel muss um 5 auf 2 reduziert werden.

6 Ermittlung von Spielzügen

Steht genau eine 1 in der ersten der zu verändernden Spalten, so gibt es genau einen Spielzug der auf eine Nullsumme führt.

Stehen drei Einsen in der ersten der zu verändernden Spalten, so gibt es sogar drei mögliche Züge, da jeder Stapel zum Verändern in Frage kommt.

6 Ermittlung von Spielzügen

Beispiel:

	16	8	4	2	1
23	1	0	1	1	1
25	1	1	0	0	1
20	1	0	1	0	0
	1	**1**	0	**1**	0

16	8	4	2	1	
0	**1**	1	**0**	1	13
1	1	0	0	1	25
1	0	1	0	0	20
0	**0**	0	**0**	0	

Variante 1: Nimm 10 von Stapel 1.
Es bleiben 13.

6 Ermittlung von Spielzügen

Beispiel:

	16	8	4	2	1
23	1	0	1	1	1
25	1	1	0	0	1
20	1	0	1	0	0
	1	**1**	0	**1**	0

16	8	4	2	1	
1	0	1	1	1	23
0	**0**	0	**1**	1	3
1	0	1	0	0	20
0	**0**	0	**0**	0	

Variante 2: Nimm 22 von Stapel 2.
Es bleiben 3.

6 Ermittlung von Spielzügen

Beispiel:

	16	8	4	2	1
23	1	0	1	1	1
25	1	1	0	0	1
20	1	0	1	0	0
	1	**1**	0	**1**	0

16	8	4	2	1	
1	0	1	1	1	23
1	1	0	0	1	25
0	**1**	1	**1**	0	14
0	**0**	0	**0**	0	

Variante 3: Nimm 6 von Stapel 3.
Es bleiben 14.

6 Ermittlung von Spielzügen

Satz 4:
Aus jeder Nullsumme entsteht im nächsten Zug eine Nim-Summe, die keine Nullsumme ist.

Beweis:
Es liegt eine Nullsumme vor.
In einem Zug verändert man in genau einer Zahl mindestens eine 1 auf eine 0 oder umgekehrt.
In dieser Spalte entsteht nun eine 1.
Damit liegt nun keine Nullsumme mehr vor.

6 Ermittlung von Spielzügen

Satz 5:
Es liegt genau dann eine Verlustkonstellation vor, wenn die Nim-Summe eine Nullsumme ist.

Beweis:
Das Spielende entspricht einer Nullsumme.
Diese kann nur von einer Summe ungleich Null erreicht werden.
Nach den Sätzen 3 und 4 kann ein Spieler immer so spielen, dass nach jedem zweiten Zug eine Nullsumme vorliegt.
Somit erzeugt er die letzte Nullsumme und hat gewonnen.

7 Schlussbemerkungen

- Für einen Laien ist die Strategie nicht offensichtlich erkennbar.
- Man benötigt Zeit und schriftliche Rechnungen, um den nächsten Zug zu ermitteln.
- Die Nullsummenstrategie ist auch in Spielen mit mehr als drei Stapeln umsetzbar.
- Es gibt zahlreiche Abwandlungen in den Spielregeln. Häufig ist eine Höchstzahl an Hölzchen, die man nehmen darf festgelegt.

Quellen

„Die Wurzel“ mathematische Schülerzeitschrift
Heft Juli 2015

Internetseiten:
https://de.wikipedia.org/wiki/Nim-Spiel

Hier kann man mit 4 Stapeln spielen:
https://www.alraft.de/altenhein/spiele/nim-spiel/index.html
verschiedene Regeln sind einstellbar

Informationen über den Dozenten

Olaf Schimmel
Lehrer am Ulf-Merbold-Gymnasium Greiz

Website: www.mathoid.de

Mail: olafschimmel@googlemail.com